MINISTÈRES
ÉDUCATION
JEUNESSE
SPORTS
ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR
RECHERCHE

Liberté
Égalité
Fraternité

RAPPORT DU JURY

SESSION 2025

Concours : Agrégation externe

Section : Mathématiques

Rapport de jury présenté par : Johan Yebbou, président du jury

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le présent rapport de jury répond à un double objectif : d'une part, rendre compte de la session écoulée, et d'autre part, contribuer à la préparation de la session à venir. Les lectrices et lecteurs y trouveront notamment :

— un bilan de la session 2025, qui présente, à l'aide de données statistiques, la physionomie d'ensemble des candidates et candidats ainsi que des admises et admis, tant du point de vue des profils que des performances ;

— une présentation de l'esprit dans lequel le jury entend aborder le concours de l'agrégation externe de mathématiques et des principes qui fondent sa conception des différentes épreuves ;

— une description assortie d'un commentaire détaillé de chacune des épreuves, analysant les productions de la session écoulée et précisant les attentes du jury.

Ce rapport se veut un document de référence à vocation informative et pédagogique. Il est destiné aux futures candidates et aux futurs candidats afin de les accompagner dans leur préparation aux épreuves du concours. S'il mentionne les lacunes et insuffisances constatées et identifie les points sur lesquels des efforts particuliers sont nécessaires, il a avant tout pour finalité d'expliciter la nature des exigences du jury et de favoriser une meilleure compréhension des critères d'évaluation.

En formulant explicitement ses attentes, le jury engage sa responsabilité dans les modalités d'appréciation des prestations. Il recommande en conséquence aux candidates et candidats, quels que soient leurs profils, ainsi qu'aux centres de préparation et à leurs intervenants, d'accorder à ce rapport la plus grande attention et de se conformer aux indications qui y sont formulées.

Le site de l'agrégation externe de mathématiques est accessible à l'adresse `agreg.org`. Il fait l'objet de mises à jour régulières en fonction de l'actualité du concours. Les visiteurs peuvent y consulter des conseils, des liens de référence, des archives (notamment les sujets des épreuves écrites et leurs corrigés), ainsi que des informations pratiques relatives à la session à venir.

En particulier, les futures candidates et les futurs candidats peuvent y télécharger la `ClefAgreg`, qui leur permet de se familiariser avec l'environnement informatique utilisé lors de l'épreuve de modélisation. Cette épreuve, fondée sur l'étude d'un texte et comportant la production d'illustrations informatiques, présente un caractère spécifique ; une préparation anticipée est indispensable pour en maîtriser les exigences et contribue à développer les capacités de synthèse sur l'ensemble du programme.

Le site permet également d'accéder à une série de vidéos réalisées par le jury, qui présentent le déroulement des épreuves de leçons et en précisent les attendus.

Enfin, le jury rappelle qu'une réunion est traditionnellement organisée en début d'année universitaire sous l'égide des sociétés savantes de mathématiques et d'informatique (Société mathématique de France, Société de mathématiques appliquées et industrielles, Société informatique de France), afin de présenter le bilan de la session écoulée et les perspectives du concours. Cette réunion est publique et ouverte à l'ensemble des universitaires intervenant dans la préparation au concours, quels que soient leurs établissements d'appartenance.

Chapitre 2

Déroulement du concours et statistiques

2.1 Commentaires généraux et statistiques sur la session 2025

2.1.1 Commentaires généraux

Le nombre de postes ouverts est de 345 en 2025 contre 365 en 2024. Le recrutement externe est par ailleurs complété par un concours externe spécial, réservé à des candidates et candidats titulaires d'un doctorat. Dix postes étaient ouverts à ce titre. Ce concours indépendant, mais dont les épreuves sont menées concomitamment à celle du concours standard, fait l'objet d'un rapport spécifique.

abcef

Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Concours externe	395	457	467	457	381	391	387	383	364	385	365	345
Concours spécial				15	16	16	16	16	16	15	15	10

Un total de 2539 candidats se sont inscrits aux épreuves écrites : 2245 pour l'agrégation française, 232 pour l'agrégation marocaine et 62 pour l'agrégation tunisienne.

Parmi les 2245 inscrits sur le concours français, seuls 1133 ont participé à au moins une des deux épreuves écrites et 1103 ont été présents aux deux épreuves écrites. On compte environ 3,2 présents par poste.

Le nombre de candidates et candidats « étudiants », auxquels ce concours devrait prioritairement s'adresser a drastiquement diminué dans les vingt dernières années. Sans rien enlever aux mérites et aux qualités des candidates et candidats relevant d'autres catégories, la faiblesse du nombre d'étudiantes et d'étudiants attirés par ce concours reste une source d'inquiétude pour le jury et plus largement pour toute la communauté éducative.

Admissibilité

Le jury a déclaré admissibles 640 candidates et candidats à l'issue des deux épreuves d'admissibilité (Mathématiques générales et Analyse-Probabilités). Onze ont été radiés faute d'avoir fourni les justificatifs nécessaires à leur inscription. Le premier admissible a une moyenne d'écrit de 20/20 et le dernier une moyenne de 5/20. Ce seuil de 5/20 est égal à celui des années passées.

Le ratio postes/admissibles de l'ordre de 0,5 laisse la possibilité de pourvoir les postes ouverts au concours. La décision finale s'apprécie sur l'ensemble du concours ; tous les candidates et candidats admissibles doivent tenter de profiter pleinement de cette possibilité. Un score modeste à l'écrit peut être compensé par des qualités techniques et pédagogiques constatées pendant les épreuves orales.

Certains candidates ou candidats parmi les plus mal classés des épreuves écrites tirent profit de cette opportunité : parmi les reçus, environ 55 candidates ou candidats avait une moyenne d'écrit inférieure ou égale à 8/20 .

Enfin, l'admissibilité au concours et les examens universitaires relèvent de processus d'évaluation distincts. Les Universités, garantes de la qualité de leurs diplômes ne jugent pas opportun de délivrer le M2 à une fraction des candidates et candidats admissibles.

La conception des sujets est guidée par la volonté de valoriser les candidats ayant investi dans une préparation sérieuse. Chacun des sujets propose des questions qu'on pourrait qualifier de « classiques », très certainement proches d'exercices qu'un titulaire de M2 a forcément traités durant sa formation universitaire. Les deux sujets, de conceptions indépendantes, ont conduit à des prestations qui manifestent les mêmes traits saillants et qui doivent faire l'objet d'une attention particulière dans les préparations :

— Le jury accorde une attention particulière à la qualité de la rédaction (présentation, orthographe, clarté de l'expression...). Un item spécifique du barème valorise cette compétence.

— Le jury accorde une attention particulière à la qualité de l'argumentation. Il valorise la maîtrise des techniques usuelles de raisonnement (par exemple, la formalisation des raisonnements par récurrence ou par contraposée). Les erreurs de logique grossières sont pénalisées.

— Une forte proportion de candidates et candidats a manqué de méthodes pour une rédaction efficace. Plus que la technicité, c'est davantage le volume abordé qui les a départagés.

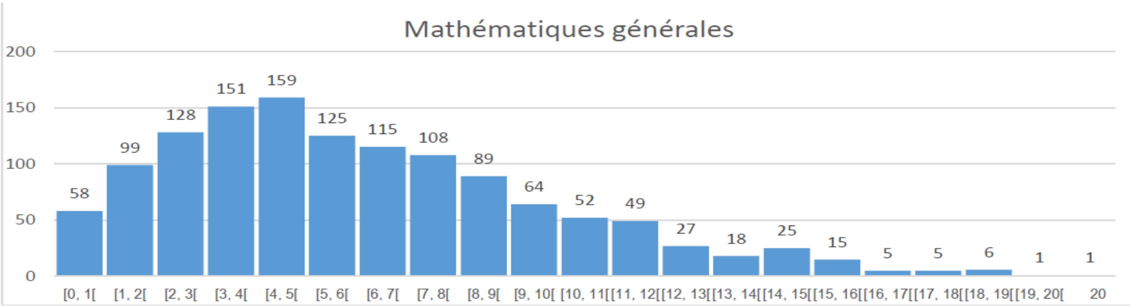

FIGURE 2.1 – *Répartition des notes de l'épreuve écrite de mathématiques générales*

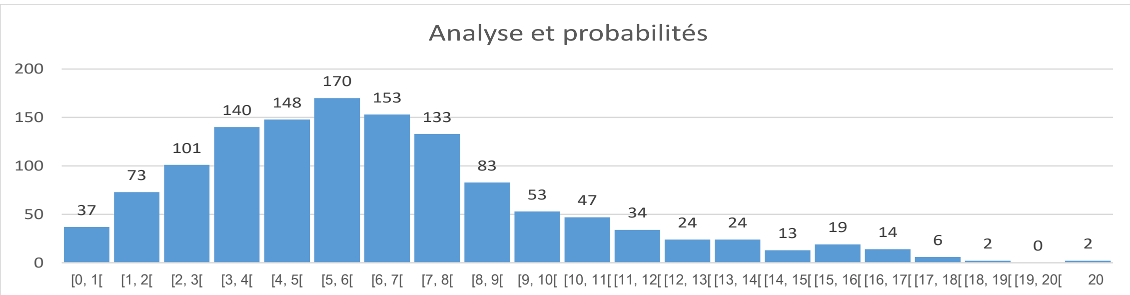

FIGURE 2.2 – *Répartition des notes de l'épreuve écrite d'analyse et probabilités*

Les deux épreuves écrites ont donné des résultats très homogènes ; moyennes et écarts-types des présents sur les épreuves écrites sont résumés dans ce tableau

	Moy. admissibles	Ecart-type admissibles
MG	8,64	3,32
AP	8,51	3,23

Oraux

Convocations. La procédure de convocation aux épreuves d'admission s'effectue en plusieurs temps. Tout d'abord, les candidates et candidats admissibles reçoivent une convocation — dite « convocation administrative »— par courriel. Cette convocation indique les trois jours de passage prévus pour leurs épreuves d'admission, mais n'en précise pas les horaires. Pour avoir des informations plus précises sur leur heures d' interrogation, les candidates et candidats doivent ensuite se connecter sur le site de l'agrégation de mathématiques, en indiquant leur numéro de candidat : cette procédure a pour objectif de s'assurer de la volonté de participer aux épreuves. Il leur est alors indiqué une heure de convocation pour le premier jour d'épreuve, et une indication sur l'heure la plus tardive à laquelle ils seront libérés à l'issue de leur troisième épreuve. Les horaires de convocation des deux épreuves suivantes sont précisés à chaque candidat la veille à l'issue de l'épreuve précédente. Cette méthode d'attribution "à la volée" des horaires de convocation a été mise en place en raison du nombre important du nombre de candidats admissibles ne se présentant pas aux épreuves orales tout en s'étant d'abord engagés à se présenter.

L'application permettant d'obtenir cette convocation plus détaillée a eté fermée, comme les années passées, quelques jours avant le début des oraux. Les candidates et candidats qui n'avaient pas ainsi édité leurs horaires devaient, par défaut, se présenter à 6h30 le premier jour de leur convocation sur les lieux du concours, sous peine d'être déclarés non présents.

Fraude. Le jury a devoir de vigilance aux risques de fraude. En particulier, tout moyen de communication ou tout support de stockage de données (téléphone, montre connectée, clef USB...) est strictement interdit lors des épreuves, écrites et orales, sous peine d'exclusion du concours. Tous les documents personnels type fiche résumé, plan préparé, notes de cours manuscrites ou dactylographiées, livres comportant des ajouts manuscrits significatifs etc. sont aussi prohibés [1]. Les livres apportés par les candidates et candidats ne doivent pasêtre annotés.

Conditions de passage des oraux. Lors des passages des candidats, le jury ne dispose d'aucune information particulière : les notes d'écrit, les notes obtenues aux oraux précédents, le statut ou la profession, etc. demeurent inconnus des commissions d'évaluation. Le jury note selon les mêmes critères, avec une grille stricte commune à toutes les commissions, toutes les personnes à partir de leur seule prestation. Des comparaisons statistiques sont faits très régulièrement pour guider l'harmonisation entre les commissions et la présidence du concours veille sur ces indicateurs. En outre, des réunions régulières entre les différentes commissions permettent d'échanger sur la notation et de rester vigilant pour réduire les éventuels écarts dans l'évaluation. Le jury a la volonté d'accueillir les candidates et candidats de manière positive et bienveillante et cherche à valoriser toutes leurs connaissances, leur travail de préparation et les aspects positifs de leurs prestations.

Auditeurs. Les oraux 2025 ont été accessibles aux auditeurs de façon contingentée. Le jury rappelle que les épreuves d'admission d'un concours ont un caractère public. Ce principe général s'applique évidemment au concours de l'agrégation de mathématiques et les candidates et candidats ne peuvent s'opposer à la présence d'auditeurs (ce qui serait quelque peu paradoxal pour des candidats à des fonctions d'enseignant). Le jury incite très fortement les futurs candidates et candidats et les préparateurs à venir assister aux épreuves et à s'appuyer sur cette expérience pour se préparer au mieux aux épreuves ; c'est un investissement qui ne peut être que bénéfique. Une attitude et une tenue correctes sont exigées des visiteuses et visiteurs. En particulier, les téléphones portables doivent être éteints. L'accès aux salles d'interrogation pourrait ne pas être autorisé à une auditrice ou un auditeur dont la tenue serait estimée inappropriée ou le comportement susceptible de perturber l'interrogation.

1. Pour les épreuves orales, un dispositif de consigne, aux risques et périls des déposants, est assuré à l'accueil des candidates et candidats et leur permet de déposer tout matériel de communication ou de stockage de données. La possession d'un tel matériel dans les salles de préparation peut conduire à l'exclusion du concours ou à l'interdiction d'assister aux épreuves.

Résultats.

À l'issue des épreuves orales, 287 candidates et candidats ont été déclarés admis ; le premier admis a eu une moyenne de 19,05/20, le dernier admis une moyenne de 8,1/20.

Ce résultat est la marque de la stabilité du concours : la barre d'admission est inchangée depuis 2015. Compte tenu du relativement faible nombre de candidates et candidats issus des préparations universitaires, le jury se réjouit de cette stabilité, qui ne fait pas de concession à la qualité des reçus.

Le jury rappelle qu'un concours n'est pas un examen : le but n'est pas de valider des connaissances. Les notes attribuées ne sont pas des jugements de valeur sur les candidates et candidats et n'ont aucun caractère « absolu » ; il ne s'agit que de discriminer au mieux une population donnée dans un contexte donné et à un instant donné. Toute la plage de notes de 0 à 20 est utilisée. Il en résulte que des candidates ou candidats peuvent recevoir des notes très basses ; elles ne sont que le reflet d'une prestation dans ce contexte particulier. Elles n'enlèvent rien à l'estime que le jury porte aux efforts de leur préparation et ne préjugent en rien de leurs qualités humaines ou professionnelles.

Le jury insiste sur l'importance de passer toutes les épreuves. Tous les ans, on déplore l'abandon de candidates et candidats qui étaient en position d'être reçus. Le stress, les sentiments de frustration à l'issue d'une interrogation et la fatigue ne peuvent être négligés. Mais ils ne doivent pas prendre le pas sur l'engagement dans le concours ; le jury encourage les candidates et candidats à se présenter aux épreuves suivantes et à s'investir jusqu'au terme du concours.

Les moyennes et écarts-types des présents à l'oral sur les différentes épreuves sont résumés dans les tableaux ci-dessous :

	Oral Alg-G	Oral Ana-P	Oral Mod	Ecrit MG	Ecrit AP
moyenne	9,8	10,4	9,0	9,2	8,9
écart-type	4,9	4,9	4,5	3,4	3,4

Moyennes et écarts-types des candidats présents à l'ensemble des épreuves

	Oral Alg-G	Oral Ana-P	Oral Mod	Ecrit MG	Ecrit AP
moyenne	12,9	13,4	11,3	10,9	10,6
écart-type	3,9	3,8	4,1	3,1	3,3

Moyennes et écarts-types des candidats admis

Ces données offrent l'occasion de rappeler le conseil de ne négliger aucune des épreuves. Les épreuves de leçons et l'épreuve de modélisation mettent en valeur des qualités, techniques et pédagogiques, différentes. L'épreuve de modélisation, avec un temps d'exposé « libre »conséquent, donne beaucoup d'autonomie à la candidate ou au candidat. Elle requiert des capacités de synthèse importantes puisque les textes font appel à des notions présentes dans l'ensemble du programme et mettent les énoncés « en situation ». De plus, il est souvent valorisant de savoir illustrer sur ordinateur un propos mathématique et des candidates et candidats en tirent parti pour produire des prestations originales et scientifiquement profondes. Mais, cette compétence ne s'improvise pas ; elle réclame un minimum de préparation en amont du concours. De manière générale, les épreuves orales demandent une certaine pratique et la manifestation d'un certain recul scientifique, qui ne peuvent résulter que d'un travail préparatoire de fond. Il est sûrement profitable de s'exercer au concours dans son ensemble tout au long de l'année, une partie des exercices proposés à l'écrit se rapprochant d'ailleurs de questions posées à l'oral et le recul gagné dans la préparation à l'oral ne pouvant être que bénéfique aux prestations écrites.

On résume dans le tableau ci-dessous l'évolution des barres d'admission depuis 2008 :

Année	Nombre de postes attribués	Barre d'admission (/20)
2025	287	8,1
2024	315	8,1
2023	345	8,1
2022	338	8,1
2021	327	8,1
2020	325	
2019	308	8,1
2018	315	8,1
2017	305	8,1
2016	304	8,1
2015	274	8,1
2014	275	8,48
2013	323	7,95
2012	308	8,1
2011	288	9,33
2010	263	9,8
2009	252	10,15
2008	252	10,1

Le recrutement de professeurs agrégés de mathématiques obéit à des critères de qualités scientifiques et pédagogiques, afin que les personnels recrutés soient en mesure de répondre efficacement aux missions actuellement données aux agrégés qui sont de pouvoir exercer sur l'ensemble du créneau « bac−3/bac+3 ». Pour cette session, le minimum requis correspond à un score total de 162/400. Il correspond à la barre retenue depuis 2015.

Cette stabilité du concours est encourageante et montre, avec les très bonnes prestations de la tête du concours, le maintien du niveau des formations universitaires. Le tableau suivant donne une indication sur la répartition des notes. On observera aussi que 233 candidats ont une moyenne supérieure ou égale à 10/20.

Rang	Moyenne
1	19,05
10	17,3
50	15,05
100	12,75
200	9,8

Réussir le concours de l'agrégation externe requiert un minimum de préparation et cette stabilité repose d'abord sur l'engagement et la qualité des formations universitaires. L'impossibilité de pourvoir les postes témoigne de l'insuffisance préoccupante d'une population étudiante souhaitant s'orienter vers l'enseignement des mathématiques. Cette faiblesse du vivier résulte de la combinaison d'une réduction des effectifs inscrits en L3 de mathématiques, et de la diversification des débouchés des études universitaires en mathématiques, qui dépassent largement le seul emploi académique puisque trois diplômés d'un Master en mathématiques sur quatre travaillent dans le secteur privé (Source : étude de l'impact socio-économique des mathématiques en France, étude menée en 2015 par CMI).

Dans cette configuration particulière, le concours externe peut offrir une opportunité de promotion pour des professeures et professeurs certifiés. Déplorer la faiblesse du vivier de candidats étudiants n'empêche pas le jury d'être particulièrement respectueux des efforts des enseignants en poste dans le secondaire qui se confrontent à ce concours. Ils forment, avec les étudiants, la catégorie la plus importante parmi les inscrits et représentent environ 20% des admissibles, dont un grand nombre lauréat de l'agrégation interne.

Le jury n'a nul doute que l'immense majorité de ces certifiés est certainement constituée d'excellents enseignants de mathématiques, même si les résultats obtenus à ce concours leur semblent parfois ne pas être à la hauteur de leur investissement. Il est clair pour le jury que l'on ne peut pas être admissible et se présenter aux épreuves orales de ce concours sans avoir acquis des compétences techniques qui dépassent largement celles de la pratique professionnelle de l'enseignant certifié. Cependant, le niveau d'exigence technique du concours leur laisse le concours difficile d'accès. Le jury souhaite accueillir chaleureusement ces collègues méritants et, même si les résultats sont en-deçà de leurs espoirs, leur renouvelle tous ses encouragements. Le volume de plus de 1000 enseignants inscrits à un concours aussi exigeant est significatif d'une réelle volonté de progression, qui mériterait d'être soutenue par un nombre accru de congés formation.

Depuis quelques années, le jury annonce à l'avance les leçons qui seront proposées aux candidats lors de la session à venir. Ainsi on trouvera en annexe de ce présent rapport la liste des leçons pour la session 2026. Cette pratique s'inscrit dans la logique d'aider les candidats à bien se préparer et à ne leur tendre aucun piège. Le jury rappelle que tous les couplages sont *a priori* possibles et qu'il veille scrupuleusement à ce que l'apparition des intitulés de leçons soit équiprobable dans l'ensemble des sujets proposés. En modélisation, la conception et la sélection des textes proposés rend tout aussi hasardeuse toute stratégie d'impasse sur une partie du programme des options.

2.1.2 Données statistiques diverses

Les tableaux et graphiques suivants présentent un bilan statistique du concours, selon le statut des candidats, leur diplôme, leur genre, leur origine géographique, leur âge. Ces statistiques portent sur les candidats qui peuvent être admis au concours. Le système d'information ne distingue pas toujours commodément les candidats à l'agrégation française des candidats aux agrégations marocaine et tunisienne, qui sont inclus dans les effectifs des inscrits et des présents.[2]

Effectifs détaillés. Le jury rappelle son attachement à la participation des élèves normaliens, qui contribue au rôle structurant du concours sur les formations universitaires en mathématiques et à l'excellence de la discipline au niveau international. Le jury espère que les responsables d'études des écoles normales supérieures restent conscients de ces enjeux et encouragent les élèves à se préparer et à passer le concours.

Ce tableau résume l'évolution des effectifs : sa première ligne du tableau porte sur l'agrégation française.

2. Sauf pour le tableau relatif au genre des candidats, qui ne porte que sur les candidats à l'agrégation française.

Année	Inscrits	Présents	Etudiants présents	ENS présents	Postes à pourvoir	Présents par poste
2025	2245	1103	405	65	345	3,2
2024	2390	1202	462	56	365	3,3
2023	2499	1337	360	61	385	3,5
2022	2858	1411	379	82	364	3,9
2021	2823	1363	348	68	383	3,6
2020	2710	1409	344	93	387	3,6
2019	2787	1628	309	92	391	4,2
2018	3285	1545	352	89	381	4,1
2017	3582	1668	374	86	457	3,6
2016	3525	1841	364	78	467	3,9
2015	3252	1841	326	89	457	4
2014	3001	1546	371	72	395	3,9
2013	2673	1393	420	81	391	3,6
2012	2673	1163	379	82	308	3,8
2011	2500	1124	445	62	288	3,9
2010	2332	1177	474	106	263	4,5
2009	2351	1384	585	116	252	5,5
2008	2491	1579	659	119	252	6,3
2007	2801	1722	800	106	290	5,9
2006	2849	1853	800	129	290	6,4
2005	2560	1644	795	105	388	4,2
2004	2333	1470	735	76	321	4,6
2003	2217	1463	657	93	360	4,1
2002	2343	1584	753	95	320	5
2001	2663	1828	857	105	310	5,9

Professions et diplômes

Libellé Profession	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
Elève d'une ENS	80	71	64	61
Etudiant en inspe en 1ere année	7	7	2	1
Etudiant en inspe en 2eme année	41	24	3	0
Etud.hors inspe (sans prépa)	125	92	75	32
Etud.hors inspe (prépa cned)	9	8	2	0
Etud.hors inspe (prépa mo.univ)	286	275	230	144
Artisans / commercants	3	0	0	144
Professions libérales	26	11	4	3
Cadres secteur privé convention collective	106	28	15	5
Salariés secteur tertiaire	29	8	4	1
Salariés secteur industriel	24	4	1	0
Sans emploi	345	166	44	17
Formateurs dans secteur privé	17	8	2	1
Emploi avenir prof.école publique	2	0	0	1
Emploi avenir prof.2nd d.publique	2	1	1	0
Agent admi.membre UE (hors France)	2	2	1	0
Personnel de direction	1	1	0	0
Personnel administratif et technique MEN	2	0	0	0
Enseignant du supérieur	15	3	0	0
Agent non titulaire fonction publique	3	1	0	0
Fonctionnaire stagiaire de la fonction publique	5	2	0	0
Militaire	1	0	0	0
Personnel enseignant titulaire fonction publique	38	15	1	0
Personnel enseignant non titulaire fonction publique	7	2	0	0
Enseignant non titulaire établissement scolaire étranger	1	0	0	0
Fonctionnaire stagiaire de la fonction territoriale	1	0	0	0
Personnel de la fonction publique	16	7	5	1
Personnel de la fonction territoriale	5	1	0	1
Personnel de la fonction hospitalière	2	0	0	1
Maître contr.et agréé rem tit	41	21	9	2
Maître contr.et agréé rem ma	3	2	1	0
Maître délégué	7	1	0	0
COP stagiaire en centre de formation	1	1	1	0
PEPS	3	1	0	0
Agrégé	19	4	3	0
Certifié	780	335	119	6
PEGC	3	1	0	6
Ens.stagiaire 2e deg. col/lyc	86	47	22	5
PLP	37	13	0	5
Instituteur	12	7	0	5
Instituteur suppléant	1	1	1	0
Professeur des écoles	72	35	2	1
Professeur des écoles stagiaire	2	0	0	1
Vacataire du 2nd degré	7	5	1	1
Vacataire enseignant du sup.	10	3	3	1
Maître auxiliaire	9	3	1	0
Professeur associé 2nd degré	122	48	4	0
Contractuel 2nd degré	90	31	7	4
Contractuel apprentissage(CFA)	1	0	0	4
Assistant d'éducation	4	3	0	4
Contractuel enseignant supérieur	18	6	2	1

Résultat du concours par catégories professionnelles

Titre ou diplôme	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
Dispense accordée au titre de : Parent de 3 enfants	46	20	10	1
Doctorat	123	40	17	5
Diplôme PostSecondaire 5 ans ou +	44	21	7	0
Grade Master	165	87	26	13
Enseignant titulaire -ancien titulaire catégorie A	246	104	27	0
CPE Titulaire Ancien Titulaire	1	1	0	0
Master MEEF	394	178	38	5
Autre Master	1046	660	418	233
Admis échelle rémunération certifié PLP PEPS	21	11	1	0
Diplôme Grande Ecole (BAC+5)	109	47	25	13
Admis échelle rémunération professeur école	2	2	0	0
Diplôme d'ingénieur (BAC+5)	314	131	60	16
Diplôme classe niveau 7	17	2	0	0
Diplôme classe niveau 8	1	1	1	1

Résultat du concours par diplômes[3]

Outre la présence notable d'enseignants certifiés, on remarque l'attractivité du concours auprès de titulaires d'un diplôme d'ingénieur ou issus d'une grande école. Cette donnée confirme l'observation d'un phénomène qui s'inscrit tant dans le cadre de projets de reconversion professionelle, que d'une orientation en fin de formation.

Malgrè l'opportunité de se présenter au concours spécial réservé aux titulaires d'un doctorat, 40 docteurs se sont présentés au concours externe. Parmi eux, 17 ont été admissibles et seulement 5 ont franchi la barre d'admission. Le taux de réussite assez faible de ces candidats, alors que certains d'entre eux ont une expérience d'enseignement dans le supérieur, interroge. Il démontre que le concours est exigeant et nécessite une préparation spécifique.

Répartition selon le genre. Les enjeux de parité font partie des préoccupations du jury, qui comprend 41% de femmes. La correction des épreuves écrites est dématérialisée et anonyme. Le jury ne dispose d'aucune information sur les candidats : il n'a accès au moment de l'admissibilité qu'aux copies repérées par un numéro. À l'oral, des processus de veille sont mis en place et le jury est en permanence vigilant sur ses pratiques afin de ne pas introduire de biais dans l'évaluation. Néanmoins, comme le tableau suivant[4] l'indique, la répartition hommes/femmes reste très déséquilibrée, comparable à celle de la session 2024, et en régression par rapport à la session 2023.

La proportion de femmes baisse entre l'inscription et l'admissibilité, et varie peu entre l'admissibilité et l'admission. Cette année, on trouve trois femmes parmi les 20 premiers et cinq parmi les 50 premiers.

Genre	Inscrits	Présents	Admissibles	Présents Oral	Admis
F	607	282	120	88	52
M	1638	821	520	414	235
Total	**2245**	**1103**	**640**	**502**	**287**
%F	27,0%	25,6%	18,8%	17,5%	18,1%

3. Les catégories professionnelles et les catégories par diplômes listées correspondent aux déclarations des candidats lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence.

4. Il porte exclusivement sur l'agrégation française.

Répartition selon l'âge. Le tableau de répartition des candidates et candidats suivant l'âge indique que l'essentiel des admises et admis agrégation externe se regroupe dans la tranche 22-28 ans.

Age	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
21	3	2	2	2
22	35	34	30	28
23	191	177	147	101
24	186	150	111	62
25	154	102	65	31
26	141	82	32	7
27	135	73	23	9
28	108	56	23	9
29	88	45	12	5
30	85	34	10	1
31	75	30	12	4
32	66	25	7	2
33	69	27	7	1
34	74	27	7	2
35	59	21	9	0
36	54	21	5	1
37	48	17	4	1
38	38	15	3	0
39	50	22	9	0
40	48	21	5	2
41	34	15	4	0
42	43	18	6	1
43	43	11	4	1
44	52	21	7	2
45	46	15	5	2
46	38	14	3	0
47	53	24	10	2
48	56	21	9	0
49	43	20	6	2
50	45	19	7	2
51	44	18	5	0
52	56	23	9	1
53	36	17	4	0
54	41	18	6	1
55	36	14	4	2
56	27	10	3	0
57	27	11	5	2
58	20	7	1	0
59	19	7	1	0
60	10	2	0	0
61	18	4	1	1
62	15	7	2	0
63	9	2	2	0
64	2	1	1	0
65	2	2	2	0
66	2	1	0	0
67	3	2	0	0
68	1	0	0	0
69	1	0	0	0

FIGURE 2.3 – *Tableau de répartition des candidats en fonction de l'âge*

Répartition selon l'académie. Le tableau de répartition des candidates et candidats par académie montre une forte concentration sur les centres Paris-Créteil-Versailles, Rennes et Lyon. Hormis ces académies, sièges des écoles normales supérieures, on relèvera le très bon taux de réussite (admis/présents) des académies de Besançon, Grenoble et Reims.

Académie	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
Aix-Marseille	85	31	14	7
Amiens	52	30	14	3
Besançon	32	28	23	13
Bordeaux	79	53	24	10
Clermont-Ferrand	40	29	20	6
Corse	6	2	0	0
Dijon	32	22	13	6
Grenoble	62	35	22	14
Guadeloupe	20	9	2	0
Guyane	13	8	4	2
La Réunion	43	30	5	0
Lille	97	44	25	8
Limoges	8	3	1	0
Lyon	121	73	46	30
Martinique	10	7	1	0
Mayotte	20	8	0	0
Montpellier	79	43	21	9
Nancy-Metz	55	30	18	9
Nantes	75	34	21	9
Nice	141	66	12	8
Normandie	70	34	21	8
Nouvelle-Calédonie	6	3	1	0
Orléans-Tours	55	25	12	2
Paris Créteil Versailles	677	307	190	81
Poitiers	333	162	4	0
Polynésie Française	16	6	1	0
Reims	27	14	8	5
Rennes	97	65	48	30
Strasbourg	71	38	25	9
Toulouse	107	66	34	18

FIGURE 2.4 – *Tableau de répartition par académie*

Chapitre 3

Épreuves d'admissibilité

3.1 Énoncés

Les sujets des deux épreuves écrites sont disponibles à l'URL

https://www.devenirenseignant.gouv.fr/sujets-et-rapports-des-jurys-agregation-2025-1435
ou sur le site

https://agreg.org.

3.2 Proposition de corrigé du problème de mathématiques générales

Présentation du sujet

L'exercice et la première partie du problème contenaient des questions d'algèbre linéaire et sur les extensions monogènes, principalement algébriques. Elles servaient de préparation aux parties suivantes, consacrées aux dérivations et aux primitives élémentaires.

La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est un exemple fameux de fonction dont les primitives ne s'expriment pas à l'aide de fonctions usuelles. Encore faut-il se mettre d'accord sur ce qu'on entend par là : informellement (et de manière légèrement incomplète), une fonction est dite « élémentaire » si on peut l'exprimer à l'aide de polynômes et de ces opérations de base : addition, soustraction, multiplication, quotient, exponentiation, extraction de racine k^{e}, et enfin composition par une exponentielle ou un logarithme. Ainsi $x \mapsto \ln\left(e^{e^x} + \sqrt[7]{x^3 - \frac{1}{x}}\right)$ est une fonction élémentaire. Si K est un corps constitué de fonctions méromorphes, nous disons qu'une fonction est élémentaire sur K si elle s'obtient à partir de fonctions dans K via les opérations que nous venons de citer.

La question de l'élémentarité d'une primitive fut naturellement soulevée par l'étude des équations différentielles. Liouville, à la suite de travaux d'Abel sur les équations différentielles de Ricatti, fut le premier à établir des résultats généraux à ce sujet, qui sont désormais naturellement associés à son nom même s'ils ont connu plusieurs raffinements. Un de ces résultats, dont la démonstration constitue l'essentiel de la partie III du problème, est le suivant :

Théorème de Liouville, Ostrowski et Ritt. Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et K un sous-corps du corps des fonctions méromorphes sur U. Soit f une fonction appartenant à K. Si f admet une primitive élémentaire sur K, alors il existe des nombres complexes $c_1, \ldots, c_n$ et des éléments $g, h_1, \ldots, h_n$

de K tels que : $f = g' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{h_i'}{h_i}$.

C'est le « théorème principal » du problème, que nous avons reformulé en termes purement algébriques. Nous en déduisons en fin de problème un critère dû à Liouville lui-même :

Critère de Liouville. Soient f et g deux fractions rationnelles à coefficients complexes, où g n'est pas constante. La fonction fe^g admet une primitive élémentaire si et seulement s'il existe une fraction rationnelle b à coefficients complexes telle que : $f = b' + bg'$.

Nous constatons l'efficacité de ce critère en l'appliquant aux primitives $x \mapsto \int_0^x e^{t^n} \mathrm{d}t$ et $x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t$ (avec n un entier supérieur ou égal à 2). Elles ne sont pas élémentaires, comme le problème propose de le démontrer en conclusion.

La démonstration du problème suit de près l'article de Maxwell Rosenlicht paru en 1968, au Pacific Journal of Mathematics, intitulé Liouville's theorem on functions with elementary integrals. C'est la première démonstration totalement algébrique de ces résultats « liouvilliens ». L'idée de cette démonstration est de partir de la relation $f = F'$ (où F est une primitive élémentaire de f dont on suppose l'existence), d'exprimer F à l'aide d'exponentielles, de logarithmes et d'éléments algébriques, et de simplifier cette expression étape par étape jusqu'à obtenir une relation du type $f = g' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{h_i'}{h_i}$. On recourt à de l'arithmétique des polynômes dans les deux premiers cas (pour cela on doit considérer les exponentielles e^g et logarithmes $\ln(g)$ apparaissant dans l'expression de F comme des « indéterminées », ce que l'on fait rigoureusement par un transfert de structure dans un corps de fractions rationnelles), à des raisonnements galoisiens dans le dernier cas, que nous avons partiellement contournés grâce à des résultats généraux sur la trace et la norme d'un élément algébrique, démontrés dans la partie I grâce à des prérequis plus terre-à-terre sur les matrices compagnons.

En guise d'ouverture, remarquons que le théorème de Liouville-Ostrowski-Ritt ne fournit pas une condition nécessaire et suffisante. Il est possible d'en obtenir une, mais au prix d'une grande sophistication. Sans rentrer dans les détails, de la même manière que les équations polynomiales ont été éclairées par le théorème de correspondance de Galois, on peut enrichir l'étude des équations différentielles en leur associant des groupes de Galois différentiels. Ils sont munis d'une certaine topologie. Alors, de la même manière que les équations polynomiales résolubles par radicaux sont exactement celles dont le groupe de Galois est résoluble, les équations différentielles dont les solutions sont « liouvilliennes » (c'est une généralisation des fonctions élémentaires) sont celles pour lesquelles la composante neutre du groupe de Galois différentiel est résoluble.

On consultera ces références pour une exposition dépouillée de toutes ces approximations :

1. J. H. Hubbard et B. Lundell, A first look at differential algebra, dans The American Mathematical Monthly, volume 118, n° 3, mars 2011.
2. E. R. Kolchin, Differential algebra and algebraic groups, 1973.
3. A. R. Magid, Lectures on Differential Galois Theory, 1994.
4. M. Rosenlicht, Liouville's theorem on functions with elementary integrals, dans Pacific Journal of Mathematics, 1968.

Commentaires du jury

Si la difficulté de la dernière partie (ainsi que de quelques questions des parties précédentes) est avérée, signalons que l'exercice et les deux premières parties ont majoritairement suffi pour classer les compositions. Le concours de l'agrégation externe cherche à recruter de futurs professeurs et non des mathématiciens véloces : toute composition ayant assuré un traitement patient et soigné de l'exercice et du début du problème, ayant démontré une maîtrise des acquis les plus essentiels de la préparation à l'agrégation (démontrer qu'une famille est une base, écrire la matrice représentative d'un endomorphisme dans cette base et en déduire son polynôme caractéristique ou minimal, déterminer un noyau, utiliser la théorie de la dimension pour faciliter l'étude d'une image ou d'une égalité entre espaces, écrire une récurrence, etc.), a également assuré l'admissibilité au concours. Le barème a valorisé ce genre de profil, prioritairement à l'habileté à résoudre les questions les plus ardues.

A contrario, nous avons relevé dans de nombreuses questions des approximations concernant des définitions pourtant vues assez tôt dans un parcours académique classique. Nous en indiquons quelques-unes ci-dessus. Nous invitons les candidats futurs à bien revoir, en vue du concours, toutes ces notions qu'on croit connaître mais dont le manque de pratique fait oublier l'un ou l'autre axiome à vérifier.

Exercice.

Cet exercice avait en vue d'éprouver des connaissances très classiques : démonstration de l'irréductibilité d'un polynôme de degré 3, qu'une famille est une base d'un espace vectoriel, calcul du polynôme caractéristique et du polynôme minimal d'une matrice.

L'irréductibilité de X^3-2 reçut moins souvent qu'espéré une justification complète : si l'on n'utilise pas le critère d'Eisenstein, on doit savoir justifier que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas un nombre rationnel, et avoir conscience qu'il ne suffit pas d'être sans racine pour être irréductible (penser à $(X^2+1)^2$ dans $\mathbb{Q}[X]$). C'est en revanche vrai si le degré est inférieur ou égal à 3, ce qu'il convenait de rappeler.

Démontrer que $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}^2)$ est une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ a fréquemment posé souci : peu de compositions ont observé le lien avec la question précédente, et ces difficultés ont annoncé celles de la première question du problème. On gagne une aisance significative dans la manipulation des nombres algébriques lorsqu'on a conscience qu'un polynôme unitaire annulateur d'un nombre algébrique x est son polynôme minimal sur un corps K si et seulement s'il est irréductible sur K, et que le polynôme minimal de x divise tous les polynômes annulateurs de ce même élément.

Les questions 3 et 4 ont été dans l'ensemble très bien traitées. La question 5 fut la moins réussie de l'exercice, sans doute parce qu'elle était la plus ouverte. Le théorème de Cayley-Hamilton est un point de départ privilégié de la discussion : il conduit à chercher le polynôme minimal parmi les diviseurs du polynôme caractéristique, que l'on est en mesure d'expliciter après l'avoir décomposé en facteurs irréductibles (ici, en l'occurrence, le polynôme caractéristique était lui-même irréductible). Quelques réponses utilisèrent avec pertinence la décomposition sur $\mathbb{C}$ du polynôme caractéristique pour déterminer le polynôme minimal, mais il fallait dans ce cas rappeler que le polynôme minimal est invariant par extension de corps. Notons aussi qu'il n'est pas nécessaire de calculer explicitement toutes les racines d'un polynôme pour démontrer qu'il est à racines simples : considérer son pgcd avec le polynôme dérivé suffit. Les candidats étant passés par un calcul explicite des racines ont dû consacrer un temps évitable sur cette question.

Problème, première partie.

La première question, qui caractérise les éléments algébriques via la dimension de l'extension de corps $K(x)/K$ (caractérisation à l'origine du très grand succès rencontré par la linéarisation de ce problème d'origine arithmétique), eut un manque de succès assez surprenant. Seule une proportion faible de copies (environ 15%) arrive à obtenir strictement plus que la moitié des points alloués à l'étude du cas algébrique. C'est souvent la démonstration que $K[x]$ est un corps qui posa problème : les moyens de le démontrer sont nombreux et nous encourageons les candidats futurs à se familiariser avec l'une de ces démonstrations, le corrigé ci-bas à l'appui (l'une d'elles fournit aussi un moyen algorithmique de construire des inverses, ce qui est intéressant en soi). Il nous semble utile d'insister que cette question attendait un meilleur succès.

Les questions 2 et 3, difficiles, n'ont que très rarement été traitées à la perfection. Dans la question 2, il était nécessaire de démontrer que μ_x est aussi le polynôme minimal de n'importe laquelle de ses racines (pas seulement x), ce qui fut presque systématiquement oublié.

La question 4, pourtant raisonnable, a mis en lumière un problème observé en d'autres endroits du sujet : les définitions des objets de base de l'algèbre ne sont pas connues ou manipulées avec suffisamment de rigueur. L'une des vérifications faisant de $x \mapsto m_x$ un morphisme de K-algèbres était souvent oubliée (la commutation avec la multiplication externe par exemple), et le fait que $\mathcal{L}_K(L)$ soit un anneau pour l'addition et la composition n'a pas toujours semblé clair : ainsi plusieurs copies s'évertuaient à tenter de démontrer que $m_x(y)m_{x'}(y) = m_{xx'}(y)$ pour tous x, x' et y, ce qui est totalement faux. Ici et ailleurs, les compositions les plus soucieuses ont tiré leur épingle du jeu et obtenu de nombreux points facilement. Qu'on se rassure : même dans un sujet où les questions « classiques » d'algèbre linéaire ne font pas florès, on ne perdra pas pied si l'on maîtrise les fondements de l'algèbre générale.

Les questions 5 à 10 furent dans l'ensemble mieux traitées. La question 5 ne pouvait pas servir à traiter la question 6 (facile et pourtant malmenée) : l'énoncé ne fut pas toujours lu avec attention.

Problème, deuxième partie.

Cette partie définit la dérivation dans un cadre purement algébrique et en donne les propriétés de base, très familières pour la plupart. Ceci explique certainement pourquoi les questions de la partie II.1 ont été traitées dans la majeure partie des compositions, souvent avec succès... tant que les vérifications restaient calculatoires : les axiomes à vérifier pour reconnaître un morphisme de groupes, une application linéaire ou un sous-corps étaient souvent imprécis voire faux. Pour démontrer que K_{cst} est un sous-corps de K, on oublie très fréquemment de s'assurer que $(K_{\text{cst}}, +)$ est un sous-groupe de $(K, +)$ (ce qui nécessite plus particulièrement de vérifier la stabilité par inverse pour l'addition) ou que 1 appartient à K_{cst}. Nous enchérissons sur un propos déjà tenu plus haut : une connaissance précise des notions de base d'algèbre générale garantissait déjà une performance honorable en vue de l'admissibilité, en dépit de la difficulté de certaines questions.

Point positif : la récurrence de la question 12 fut souvent rédigée avec toute la précision exigée par le concours depuis plusieurs années. Les rédactions négligées détonnaient d'autant plus par contraste : on doit définir précisément le prédicat à démontrer, l'initialisation et l'hérédité doivent clairement apparaître (en prenant garde à clairement introduire $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et supposer P_n), et il faut conclure. L'omission d'au moins une de ces quatre étapes fut systématiquement sanctionnée.

Une construction correcte du corps fini $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[j]$, dans la question 15, fut observée assez régulièrement, ce qui est appréciable. En revanche la démonstration que j^3 égale 1, quoique juste dans la plupart des copies ayant su construire j, fut souvent tortueuse. La division euclidienne par un polynôme annulateur n'est pas qu'un outil théorique (comme dans la question 1 de la première partie), loin s'en faut. La factorisation de $X^3 - 1$ par $X^2 + X + 1$ est d'ailleurs une identité remarquable qui, évaluée en j, donne immédiatement $j^3 - 1 = 0$.

La question 17 a rarement posé problème. La question 18 eut des succès variés : peu de compositions s'acquittent de toutes les vérifications à faire. La plus fréquemment omise est qu'une relation définit une application seulement lorsque chaque élément de l'ensemble de départ n'a qu'une seule image. En termes plus concrets, il s'agissait de vérifier la cohérence de la définition de $D(x)$ proposée (avec x appartenant au corps des fractions d'un anneau intègre A), c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la manière d'écrire x sous la forme $\frac{a}{b}$, avec a et b dans A.

Les questions 19 à 26 nécessitaient un recul certain sur les extensions monogènes, les isomorphismes et les anneaux quotients. Elles ont plus rarement été traitées avec satisfaction. Les questions 27 et 28 apparaissent dans une minorité de compositions.

Problème, troisième partie.

Très peu de compositions ont abordé non superficiellement cette partie au-delà des questions 29 à 31, ce qui est compréhensible. Ainsi un traitement soigné des deux premières parties en quasi-intégralité suffisait à assurer une très bonne voire excellente note. Nous avons observé quelques tentatives de « grappillage » à la question 32, infructueux parce qu'il fallait réellement s'approprier les définitions de cette partie pour saisir l'enjeu de cette question. Aucune question n'a été traitée au-delà de la question 43.

Proposition de corrigé

Exercice

1. **Avec le critère d'Eisenstein.** Comme $X^3 - 2$ est un polynôme primitif (ses coefficients sont premiers entre eux), il est irréductible sur $\mathbb{Q}$ si et seulement s'il l'est sur $\mathbb{Z}$. On démontre l'irréductibilité sur $\mathbb{Z}$ avec le critère d'Eisenstein : le nombre premier 2 divise tous ses coefficients sauf le coefficient dominant, et 2^2 ne divise pas le coefficient constant. Par le critère d'Eisenstein, $X^3 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$, ce qui conclut.

   Sans le critère d'Eisenstein. Comme $X^3 - 2$ est de degré 3, il est irréductible sur $\mathbb{Q}$ si et seulement s'il n'admet pas de racine dans $\mathbb{Q}$.

   Démontrons donc qu'il n'admet pas de racine dans $\mathbb{Q}$ en raisonnant par l'absurde : soit x une racine rationnelle de $X^3 - 2$. On peut l'écrire : $x = \frac{a}{b}$, avec a et b des entiers non nuls premiers entre eux. Alors : $a^3 = 2b^3$, et donc b divise a^3, et comme ils sont premiers entre eux ce n'est possible que si $b = \pm 1$. Or il n'existe pas d'entier a tel que : $a^3 = \pm 2$ (un tel entier divise 2, mais $(\pm 1)^3$ et $(\pm 2)^3$ ne valent pas ± 2). Contradiction.

   Par l'absurde, $X^3 - 2$ n'a pas de racine rationnelle et est donc irréductible sur $\mathbb{Q}$ d'après l'argument évoqué ci-dessus.

2. Démontrons que la famille $\mathcal{B} = (1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$, qui appartient bien à $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ (on a : $\sqrt[3]{4} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2$), en est une base en démontrant qu'elle est libre et génératrice.

   Démontrons qu'elle est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ tel que : $a \cdot 1 + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$. Si l'on note $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{Q}[X]$, on a alors : $P(\sqrt[3]{2}) = 0$. On en déduit que P appartient à l'idéal annulateur $\mathrm{Ann}_{\sqrt[3]{2},\mathbb{Q}}$, qui est engendré par le polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$ sur $\mathbb{Q}$. Autrement dit : $\mu_{\sqrt[3]{2},\mathbb{Q}}$ divise P. Or la question précédente assure que l'on a : $\mu_{\sqrt[3]{2},\mathbb{Q}} = X^3 - 2$. En effet, comme $X^3 - 2$ admet $\sqrt[3]{2}$ pour racine, par le même argument que ci-avant on sait que $\mu_{\sqrt[3]{2},\mathbb{Q}}$ divise $X^3 - 2$. Comme ce dernier polynôme est irréductible sur $\mathbb{Q}$, ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même (à des constantes multiplicatives non nulles près), ce dont on déduit que $\mu_{\sqrt[3]{2},\mathbb{Q}}$ et $X^3 - 2$ sont associés. Comme ils sont tous les deux unitaires, on en déduit l'égalité voulue.

   En résumé, $X^3 - 2$ divise P, donc pour des raisons de degré on a : $P = 0_{\mathbb{Q}[X]}$, c'est-à-dire : $a = b = c = 0$. Ceci démontre que $\mathcal{B}$ est libre.

   Démontrons que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice. Soit $x \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$. Il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que : $x = P(\sqrt[3]{2})$. Effectuons alors la division euclidienne de P par $X^3 - 2$. Il existe $(Q, R) \in \mathbb{Q}[X]^2$ tel que : $P = (X^3 - 2)Q + R$, et : $\deg(R) \leqslant 2$. En évaluant en $\sqrt[3]{2}$ cette égalité, on a :

   $$x = P(\sqrt[3]{2}) = R(\sqrt[3]{2}),$$

   or $R(\sqrt[3]{2})$ est combinaison linéaire de 1, $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt[3]{4} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2$ puisque R est de degré au plus 2, donc : $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$. Ceci démontre que $\mathcal{B}$ engendre $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

   Ainsi $\mathcal{B}$ est libre et génératrice : c'est une base de $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

3. On a :

$$m_\alpha(1) = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}, \quad m_\alpha(\sqrt[3]{2}) = 2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}, \quad m_\alpha(\sqrt[3]{4}) = 2 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4},$$

donc la matrice représentative de m_α dans la base $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On soustrait la deuxième ligne à la troisième (afin d'un tout petit peu alléger le calcul à suivre) puis on développe par rapport à la première colonne. On obtient :

$$\begin{aligned} \chi_{m_\alpha} &= \begin{vmatrix} X-1 & -2 & -2 \\ -1 & X-1 & -2 \\ 0 & -X & X+1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)\begin{vmatrix} X-1 & -2 \\ -X & X+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -X & X+1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)\left(X^2-1-2X\right) - 2\left((X+1)+X\right) \\ &= X^3 - 3X^2 - 3X - 1. \end{aligned}$$

5. On sait que le polynôme minimal de m_α divise χ_{m_α}, qui est égal à $X^3 - 3X^2 - 3X - 1$ d'après la question précédente. Or ce polynôme est irréductible sur $\mathbb{Q}$, comme nous allons le justifier. Comme il est de degré 3 sur $\mathbb{Q}$, il suffit de démontrer qu'il n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$. Démontrons donc qu'il n'admet pas de racine dans $\mathbb{Q}$ en raisonnant par l'absurde : soit x une racine rationnelle de χ_{m_α}. On peut l'écrire : $x = \frac{a}{b}$, avec a et b des entiers naturels non nuls premiers entre eux. Alors l'égalité $\chi_{m_\alpha}\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ implique, après multiplication par b^3 :

$$a\left(a^2 - 3ab - 3b^2\right) = b^3,$$

ce dont on déduit que a divise b^3. Comme a et b sont premiers entre eux, cela implique : $a \in \{-1, 1\}$. De même, en réarrangeant l'expression ci-dessus de sorte à regrouper les termes dépendant de b :

$$a^3 = \left(3a^2 + 3ab + b^2\right) b,$$

donc b divise a^3. Par le même argument : $b \in \{-1, 1\}$. Ainsi les seules racines rationnelles possibles de χ_{m_α} sont dans $\{-1, 1\}$. Or : $\chi_{m_\alpha}(1) = -6 \neq 0$, et : $\chi_{m_\alpha}(-1) = -2 \neq 0$. Il n'y a donc pas de racine rationnelle. Par l'argument ci-dessus, χ_{m_α} est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Or le polynôme minimal de m_α le divise et n'est pas constant, donc il lui est associé. Comme ils sont tous les deux unitaires, on conclut : le polynôme minimal μ_{m_α} de m_α est :

$$\mu_{m_\alpha} = \chi_{m_\alpha} = X^3 - 3X^2 - 3X - 1.$$

Autre démonstration de l'irréductibilité de χ_{m_α}. On peut aussi appliquer le critère d'Eisenstein à $\chi_{m_\alpha}(X+1) = X^3 - 6X - 6$ (prendre le nombre premier 2 ou 3) ou $\chi_{m_\alpha}(X-1) = X^3 - 6X^2 + 6X - 2$.

Autre démonstration possible. Le polynôme caractéristique de m_α est scindé sur $\mathbb{C}$ par le théorème fondamental de l'algèbre, et il est à racines simples. On peut le démontrer soit par une explicitation de ses racines, soit en calculant le pgcd de χ_{m_α} et χ'_{m_α} (et même un peu moins que cela : le reste dans la première division euclidienne suffira), ce qui nous semble moins calculatoire. On a après calcul : $\chi_{m_\alpha} = \frac{X-1}{3}\chi'_{m_\alpha} - 4X - 2$, donc si λ est une racine double de χ_{m_α} on a : $\lambda = -\frac{1}{2}$, or on vérifie que réciproquement $-\frac{1}{2}$ n'est pas racine de χ_{m_α}. Ainsi χ_{m_α} n'admet pas de racine en commun avec sa dérivée, donc il est à racines simples.

Or on sait que le polynôme minimal de la matrice représentative de m_α, vue comme matrice de $M_3(\mathbb{C})$, divise χ_{m_α} et a les mêmes racines de χ_{m_α}, ce qui assure qu'il est de degré exactement 3 et est donc égal à χ_{m_α}. Comme le polynôme minimal d'une matrice est invariant par extension de corps, on conclut : $\mu_{m_\alpha} = \chi_{m_\alpha}$.

Problème

Partie I

1. (a) Il suffit de considérer l'application $\Phi : P \mapsto P(x)$, qui est bien un morphisme de K-algèbres de $K[X]$ dans $K[x]$ qui envoie X sur x. Son noyau est par définition $\mathrm{Ann}_{x,K}$.

   (b) L'application $\Phi : P \mapsto P(x)$ est un morphisme de K-algèbres de $K[X]$ dans $K[x]$, surjectif d'après la description explicite des éléments de $K[x]$ rappelée dans l'énoncé, injectif parce que son noyau est $\mathrm{Ann}_{x,K} = \{0\}$ par hypothèse sur x. C'est donc un isomorphisme entre $K[X]$ et $K[x]$, ce qui démontre la première partie de ce qui est demandé.

   Il se prolonge en un isomorphisme $\tilde{\Phi} : K(X) \to K(x)$ entre les corps de fractions, en posant :
$$\tilde{\Phi}\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$
   On vérifie aisément qu'il ne dépend pas de la représentation d'un élément de $K(X)$ sous la forme $\frac{P}{Q}$, et comme $Q(x) \neq 0$ pour tout $Q \in K[X]$ (en effet x est transcendant), le quotient du membre de droite est correctement défini. C'est l'isomorphisme recherché (la surjectivité est conséquence de la définition de $K(x)$ et un morphisme d'anneaux unitaires défini sur un corps est toujours injectif).

   Or $K(X)$ est de dimension infinie sur K puisque cet espace vectoriel contient la famille libre $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Comme un isomorphisme préserve les dimensions, on conclut que $K(x)$ est également de dimension infinie sur K.

   (c) Pour démontrer : $K(x) = K[x]$, notons déjà que l'on a une première inclusion évidente : $K[x] \subseteq K(x)$. Pour avoir l'inclusion réciproque, il suffit de démontrer que $K[x]$ est un corps et d'utiliser la propriété de minimalité de $K(x)$.

   Faisons. Le morphisme de K-algèbres $\Phi : P \mapsto P(x)$ est une surjection de $K[X]$ dans $K[x]$. Par le théorème d'isomorphisme, il se factorise en un isomorphisme de K-algèbres (et donc d'anneau) :
$$K[X]/\ker(\Phi) = K[X]/(\mu_x) \simeq K[x].$$
   Or μ_x est irréductible sur K, donc l'anneau quotient $K[X]/(\mu_x)$ est un corps : un isomorphisme d'anneau préserve la structure de corps, donc $K[x]$ est un corps. C'est un sous-corps de L contenant K et x, or $K(x)$ est minimal pour cette propriété, donc : $K(x) \subseteq K[x]$. Ceci démontre l'égalité.

   Pour la seconde partie de la question : déterminons une K-base de $K(x)$. D'après l'égalité que l'on vient de démontrer, il suffit d'en exhiber une de $K[x]$. Or une base de $K[X]/(\mu_x)$ est $\mathcal{B} = \left(\overline{X}^k\right)_{0\leqslant k\leqslant \deg(\mu_x)-1}$, comme nous allons le justifier brièvement : on démontre le caractère générateur en effectuant la division euclidienne de $P \in K[X]$ par $\mu_x \neq 0$: l'égalité $P = Q\mu_x + R$, avec $\deg(R) < \deg(\mu_x)$, donne en passant au quotient : $\overline{P} = \overline{R} \in \mathrm{Vect}_K(\mathcal{B})$. Pour l'indépendance linéaire, notons qu'une relation de dépendance linéaire entre vecteurs de $\mathcal{B}$ équivaut à une égalité de la forme : $\overline{P} = \overline{0}$, avec $\deg(P) < \deg(\mu_x)$. Autrement dit : μ_x divise P, donc $P = 0$ pour des raisons de degré. La nullité des coefficients de P démontre que la seule relation de dépendance linéaire possible entre vecteurs de $\mathcal{B}$ est la relation triviale, donc $\mathcal{B}$ est libre en plus d'être génératrice : c'est une base de $K[X]/(\mu_x)$.

Un isomorphisme de K-algèbres préserve les bases, donc :

$$\Phi(\mathcal{B}) = \left(x^k\right)_{0\leqslant k\leqslant \deg(\mu_x)-1}$$

est une base de $K[x] = K(x)$: on en déduit par ailleurs que $K(x)$ est de dimension $\deg(\mu_x)$, d'où le résultat.

Autre démonstration que $K[x] = K(x)$. Il est facile de se convaincre que l'inclusion $K(x) \subseteq K[x]$ est vérifiée dès lors qu'on a démontré que l'inverse d'un élément non nul de $K[x]$ est dans $K[x]$ (afin de pouvoir écrire toute fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sous la forme d'un polynôme en x). Les arguments pour y parvenir ne manquent pas : on peut par exemple noter que si $Q(x) \in K[x]$ est non nul, alors l'endomorphisme de multiplication $z \mapsto zQ(x)$, défini de $K[x]$ dans $K[x]$ (par structure d'anneau), est injectif par intégrité de $K[x] \subseteq L$. Par un argument dimensionnel (une partie génératrice finie de $K[x]$ est $\left(x^k\right)_{0\leqslant k\leqslant \deg(\mu_x)-1}$, voir ci-dessus), on en déduit qu'il est surjectif et qu'il existe donc $z \in K[x]$ tel que : $zQ(x) = 1$, ce qui conclut.

Une autre approche via le théorème de Bézout amène au même résultat : si $Q(x) \in K[x]$ est non nul, alors Q n'appartient pas à l'idéal annulateur $\mathrm{Ann}_{x,K}$ et donc μ_x ne le divise pas. Or μ_x est irréductible, donc on en déduit que μ_x et Q n'ont pas de diviseur irréductible en commun : ils sont premiers entre eux dans $K[X]$. Par le théorème de Bézout, il existe $(U,V) \in K[X]^2$ tel que : $UQ + V\mu_x = 1$. Une évaluation en x donne : $U(x)Q(x) = 1$, donc $Q(x)$ admet $U(x)$ pour inverse dans $K[x]$. Ceci vaut pour tout élément non nul de $K[x]$, ce qui conclut.

2. Supposons que μ_x admet une racine au moins double $z \in L$ (en vérité l'extension à laquelle appartient z n'a pas d'importance). On a alors : $\mu_x'(z) = 0$, comme on l'observe en dérivant une relation de la forme $\mu_x = (X-z)^2 Q$ et en l'évaluant en z. On en déduit que le polynôme minimal de z sur K divise μ_x' ; or ce polynôme minimal est μ_x (en effet, $\mu_x(z) = 0$ implique : $\mu_z \mid \mu_x$, et comme μ_x est irréductible et unitaire on a l'égalité). On en déduit :

$$\mu_x \mid \mu_x'.$$

Comme : $\deg(\mu_x') < \deg(\mu_x)$, ce n'est possible que si μ_x' est nul.

3. Soit $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$. On a : $P' = \sum\limits_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}$, et donc :

$$P' = 0 \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ i a_i = 0.$$

Si K est de caractéristique nulle, c'est vrai si et seulement si $a_i = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, si et seulement si P est un polynôme constant.

En revanche, si K est de caractéristique p avec p un nombre premier, alors les égalités ci-dessus équivalent à $a_i = 0$ pour tout i qui n'est pas un multiple de p (tandis que l'égalité $i a_i = 0$ est vraie dès que p divise i, sans condition sur a_i). Ainsi $P' = 0$ si et seulement s'il est combinaison linéaire de monômes dont l'exposant est un multiple de p. Autrement dit :

$$P' = 0 \Longleftrightarrow \exists Q \in K[X],\ P = Q(X^p).$$

En conclusion :

$$\ker(P \mapsto P') = \begin{cases} K_0[X] & \text{si } K \text{ est de caractéristique nulle,} \\ \{Q(X^p) \mid Q \in K[X]\} & \text{si } K \text{ est de caractéristique } p > 0. \end{cases}$$

On nous demande d'en déduire que, si K est de caractéristique nulle ou un corps fini, alors μ_x est à racines simples. Pour cela on raisonne par l'absurde : si μ_x n'est pas à racines simples, alors d'après la question précédente on a : $\mu_x' = 0$.

Si K est de caractéristique nulle, d'après ce qu'on vient de démontrer cela veut dire que μ_x est un polynôme constant, ce qui est impossible par définition d'un polynôme minimal (un polynôme constant et unitaire vaut 1 : il n'admet pas de racine).
Si K est un corps fini de cardinal $q = p^k$, avec p un nombre premier et $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, alors il existe $Q = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$ tel que : $\mu_x = Q(X^p) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{ip}$, et Q n'est pas un polynôme constant (sinon μ_x le serait). Or l'application de Frobenius $x \mapsto x^p$ est un endomorphisme du corps K, injectif comme tout morphisme de corps, donc surjectif puisqu'il est entre deux ensembles finis de même cardinal. On en déduit que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, il existe $b_i \in K$ tel que : $a_i = b_i^p$. La propriété de morphisme de $x \mapsto x^p$ permet de conclure :

$$\mu_x = \sum_{i=0}^{n} b_i^p X^{ip} = \left(\sum_{i=0}^{n} b_i X^i\right)^p.$$

En effet, cette égalité démontre que μ_x n'est pas irréductible (on a $p \geqslant 2$), ce qui est contradictoire.
Nous avons trouvé une contradiction dans tous les cas. Par l'absurde, μ_x est à racines simples.

4. Notons $\psi : L \to \mathcal{L}_K(L)$ l'application définie par $x \mapsto m_x$. On a : $\psi(1) = m_1 = \mathrm{Id}_L$, et :

$$\forall (x, x', y) \in L^3, \quad \psi(x + x')(y) = m_{x+x'}(y) = (x + x')y = xy + x'y = m_x(y) + m_{x'}(y),$$

donc : $\forall (x, x') \in L^2$, $\psi(x + x') = \psi(x) + \psi(x')$. On démontre par des manipulations analogues :

$$\forall (x, x') \in L^2,\ \psi(xx') = \psi(x) \circ \psi(x'), \quad \text{et :} \quad \forall x \in L,\ \forall \lambda \in K,\ \psi(\lambda x) = \lambda\psi(x),$$

ce qui démontre que ψ est un morphisme de K-algèbres de L dans $\mathcal{L}_K(L)$.
Démontrons l'injectivité en démontrant que le noyau est trivial. Soit $x \in L$ tel que $\psi(x) = 0_{\mathcal{L}_K(L)}$. Alors : $\psi(x)(1) = x \cdot 1 = 0$, donc $x = 0$. D'où le résultat : ψ est injectif.
On en déduit, pour tout $x \in L$ et tout $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$:

$$P(m_x) = \sum_{i=0}^{n} a_i m_x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \psi(x)^i = \psi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \psi(P(x)) = m_{P(x)}.$$

Considérons alors $x \in L$ un élément algébrique sur K. On déduit de ce qui précède :

$$\forall P \in K[X], \quad \left(P(m_x) = 0_{\mathcal{L}(L)} \iff m_{P(x)} = 0_{\mathcal{L}_K(L)} \iff x = 0\right),$$

la dernière équivalence étant justifiée par l'injectivité de ψ. Ainsi x et m_x admettent les mêmes idéaux annulateurs, lesquels ont donc les mêmes polynômes unitaires générateurs lorsqu'ils existent (et c'est le cas ici, par hypothèse sur x). D'où : $\mu_{m_x} = \mu_x$, ce qu'il fallait démontrer.

5. Notons que par la question 1.(c), on sait que $L = K(x)$ est de dimension finie égale à d, et qu'une base est $\left(x^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$. On a :

$$\forall i \in [\![0, d-2]\!],\ m_x(x^k) = x^{k+1}, \quad \text{et :} \quad m_x(x^{d-1}) = x^d = -\sum_{i=0}^{d-1} a_i x^i,$$

puisque : $x^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i x^i = \mu_x(x) = 0$. La matrice représentative de μ_x est donc bien la matrice compagnon associée à μ_x, appelée C dans l'énoncé.

6. La trace et le déterminant d'un endomorphisme d'un K-espace vectoriel appartiennent à K, d'où le résultat.

7. (a) On a : $\mathrm{tr}_{L/K} = \mathrm{tr} \circ \psi$, où $\psi : x \mapsto m_x$ est le morphisme de la question 4, donc la K-linéarité de ψ et tr implique celle de $\mathrm{tr}_{L/K}$. De même, la propriété de multiplicativité de ψ et det implique celle de $\mathrm{N}_{L/K}$.
Soit $x \in L^*$. L'égalité $\mathrm{N}_{L/K}(x)\mathrm{N}_{L/K}(x^{-1}) = \mathrm{N}_{L/K}(1) = \det(\mathrm{Id}_L) = 1$ assure que $\mathrm{N}_{L/K}(x) \neq 0$.
Non nullité de $\mathrm{N}_{L/K}(x)$: autre argument. Si $\mathrm{N}_{L/K}(x) = 0$, alors m_x n'est pas inversible et admet 0 comme valeur propre ; donc X divise μ_{m_x}, qui est irréductible car égal à μ_x qui l'est : ceci impose $X = \mu_x$ et donc $x = \mu_x(x) = 0$. D'où le résultat par contraposée.
(b) Si $u \in K$, alors on a : $m_u = u \cdot m_1 = u\mathrm{Id}_L$, donc :
$$\mathrm{tr}_{L/K}(u) = u \cdot \mathrm{tr}(\mathrm{Id}_L) = u \cdot \dim_K(L), \quad \text{et :} \quad \mathrm{N}_{L/K}(u) = u^{\dim_K(L)} \det(\mathrm{Id}_L) = u^{\dim_K(L)}.$$
8. Comme x appartient à L, la K-algèbre $K(x)$ est incluse dans L. Or L est de dimension finie sur K, donc $K(x)$ également. Par la question 1.(b), ce n'est possible que si x est algébrique sur K : d'où le résultat.
9. Notons d'abord que la famille $\left(\ell_i \cdot x^{j-1}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant a\\1\leqslant j\leqslant d}}$ (qui est bien une famille de L) est de cardinal ad.
Or, par la formule de multiplicativité des degrés rappelée dans l'énoncé :
$$\dim_K(L) = \dim_K(K(x)) \dim_{K(x)}(L) \overset{(q.\,1.(c))}{=} da.$$
Par conséquent, pour démontrer que $\left(\ell_i \cdot x^{j-1}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant a\\1\leqslant j\leqslant d}}$ est une K-base de L, il suffit de démontrer que c'est une famille K-libre. Soit $(c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant a\\1\leqslant j\leqslant d}} \in K^{ad}$ tel que :
$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant a\\1\leqslant j\leqslant d}} c_{i,j}\ell_i x^{j-1} = 0.$$
Pour reconnaître une relation de dépendance $K(x)$-linéaire entre les vecteurs ℓ_i, réécrivons cette relation ainsi :
$$\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{d} c_{i,j}x^{j-1}\right)\ell_i = 0.$$
Comme $\sum\limits_{j=1}^{d} c_{i,j}x^{j-1}$ appartient à $K(x)$ pour tout $i \in [\![1,a]\!]$, la $K(x)$-liberté de $(\ell_i)_{1\leqslant i\leqslant a}$ (vérifiée puisque c'est une $K(x)$-base de L) implique :
$$\forall i \in [\![1,a]\!], \quad \sum_{j=1}^{d} c_{i,j}x^{j-1} = 0.$$
Cette fois on utilise la K-liberté de $(x^{j-1})_{1\leqslant j\leqslant d} = (x^j)_{0\leqslant j\leqslant d-1}$, démontrée à la question 1.(c). Elle implique $c_{i,j} = 0$ pour tous i et j, ce qui achève de démontrer l'indépendance linéaire sur K de la famille $\left(\ell_i \cdot x^{j-1}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant a\\1\leqslant j\leqslant d}}$.
Par l'argument dimensionnel mentionné ci-dessus, $\left(\ell_i \cdot x^{j-1}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant a\\1\leqslant j\leqslant d}}$ est une K-base de L.
10. Ordonnons la famille $\mathcal{B} = \left(\ell_i \cdot x^{j-1}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant a\\1\leqslant j\leqslant d}}$ dans l'ordre lexicographique, c'est-à-dire : d'abord les éléments de la forme $\ell_1 \cdot x^{j-1}$ avec j parcourant $[\![1,d]\!]$, puis les éléments de la forme $\ell_2 \cdot x^{j-1}$, etc. On a, par le même calcul que dans la question 5 :
$$\forall i \in [\![1,a]\!],\ \forall j \in [\![1,d]\!], \quad m_x(\ell_i x^{j-1}) = \begin{cases} \ell_i x^j & \text{si } j \leqslant d-1, \\ -\sum\limits_{j=1}^{d} \ell_i a_j x^{j-1} & \text{si } j = d, \end{cases}$$

ce qui détermine les coefficients des colonnes allant de l'indice $(i, 1)$ à l'indice (i, d), dans la matrice représentative de m_x relativement à $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 0_{(i-1)d,d} \\ C \\ 0_{(a-i)d,d} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la matrice représentative de m_x dans $\mathcal{B}$ est une matrice diagonale par blocs, de blocs diagonaux tous égaux à C. Il y a $a = \frac{n}{d}$ blocs diagonaux. En prenant la trace et le déterminant de cette matrice, on obtient :

$$\operatorname{tr}_{L/K}(x) = \frac{n}{d}\operatorname{tr}(C) = \frac{n}{d}(-a_{d-1}), \quad \text{et} : \quad \mathrm{N}_{L/K}(x) = \det(C)^{\frac{n}{d}} = \left((-1)^d a_0\right)^{\frac{n}{d}}.$$

Pour calculer $\det(C)$, il suffit de développer ce déterminant par rapport à la première ligne et de reconnaître le produit de $(-1)^{d+2}a_0$ par $\det(\mathrm{I}_{d-1})$.

Par les relations coefficients-racines, on a : $\sum_{i=1}^{d} x_i = -a_{d-1}$, et : $\prod_{i=1}^{d} x_i = (-1)^d a_0$. On en déduit les deux relations voulues :

$$\operatorname{tr}_{L/K}(x) = \frac{n}{d}\sum_{i=1}^{d} x_i, \quad \mathrm{N}_{L/K}(x) = \left(\prod_{i=1}^{d} x_i\right)^{\frac{n}{d}}.$$

Partie II

II.1 – Formulaire de calcul.

11. La formule de dérivation d'un produit : $D(uv) = D(u)v + uD(v)$, appliquée à $u = v = 1$, donne : $D(1) = 2D(1)$, donc : $D(1) = 0$.
    On en déduit, pour tout $x \in K^*$:
    $$0 = D(1) = D\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{D(x)}{x} + xD\left(\frac{1}{x}\right),$$
    donc en divisant par $x \neq 0$ on obtient : $\forall x \in K^*$, $D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{D(x)}{x^2}$.
12. Démontrons P_n : « $D(x^n) = nx^{n-1}D(x)$ » pour tout entier $n \geqslant 1$, par récurrence sur n.
    Pour $n = 1$ on a bien sûr : $D(x^1) = 1 \cdot x^0 D(x)$, d'où P_1. Passons à l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On suppose P_n. La formule de dérivation d'un produit donne :
    $$D(x^{n+1}) = D(x^n \cdot x) = D(x^n)x + x^n D(x) \overset{(\mathrm{P}_n)}{=} nx^{n-1}D(x) \cdot x + x^n D(x) = (n+1)x^n D(x),$$
    d'où P_{n+1}. La propriété étant héréditaire, par principe de récurrence on a P_n pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, c'est-à-dire :
    $$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad D(x^n) = nx^{n-1}D(x).$$
    Démontrons que si $x \neq 0$ alors cette identité vaut pour tout $n \in \mathbb{Z}$. C'est valable pour $n = 0$, puisque $D(1) = 0$ par la question précédente. Le cas $n > 0$ vient d'être traité. Si $n < 0$, alors $-n > 0$, ce qui permet d'appliquer la formule ci-dessus avec $-n$ au lieu de n, et x^{-1} au lieu de x. On obtient :
    $$D\left(x^n\right) = D\left(\left(x^{-1}\right)^{-n}\right) = -n\left(x^{-1}\right)^{-n-1} D\left(x^{-1}\right) \overset{(q.11)}{=} -nx^{n+1} \cdot \left(-\frac{D(x)}{x^2}\right) = nx^{n-1}D(x),$$
    d'où le résultat pour $n < 0$.
    Enfin :
    $$D\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{D(x)}{y} + xD\left(\frac{1}{y}\right) \overset{(q.11)}{=} \frac{D(x)}{y} - \frac{xD(y)}{y^2} = \frac{D(x)y - xD(y)}{y^2},$$
    ce qu'il fallait démontrer.

13. Comme D est un morphisme de groupes additif de K dans lui-même, son noyau K_{cst} est un sous-groupe de K, contenant 1 par la question 11. Il reste à justifier la stabilité par produit et par inversion. La formule de dérivation d'un produit donne :

$$\forall (u,v) \in K_{\text{cst}}^2, \quad D(uv) = D(u)v + uD(v) = 0,$$

et la question 11 démontre que $D\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{D(u)}{u^2}$ pour tout $u \in K^*$, donc la nullité de $D(u)$ implique celle de $D\left(\frac{1}{u}\right)$, assurant la stabilité par inversion de K_{cst}. Ceci achève de démontrer que c'est un sous-corps de K.

Démontrons que D est une application K_{cst}-linéaire. Par définition c'est une fonction additive, et la formule de dérivation d'un produit donne :

$$\forall (\lambda, u) \in K_{\text{cst}} \times K, \quad D(\lambda u) = D(\lambda)u + \lambda D(u) = \lambda D(u),$$

d'où le résultat.

14. (a) Pour tout $(u,v) \in (K^*)^2$, la formule de dérivation d'un produit donne :

$$L_D(xy) = \frac{D(u)v + uD(v)}{uv} = \frac{D(u)}{u} + \frac{D(v)}{v} = L_D(u) + L_D(v),$$

démontrant que L_D est un morphisme de groupes de $(K^*, \times)$ dans $(K, +)$. Soit $u \in K^*$. On a :

$$u \in \ker(L_D) \iff L_D(u) = 0 \iff \frac{D(u)}{u} = 0 \iff D(u) = 0 \iff u \in K_{\text{cst}},$$

donc : $\ker(L_D) = K_{\text{cst}} \cap K^* = K_{\text{cst}}^*$.

(b) L'identité demandée est une conséquence immédiate de la propriété de morphisme de L_D. On a en effet :

$$\frac{D(R)}{R} = L_D(R) = L_D\left(c\prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)^{\beta_i}\right) = L_D(c) + \sum_{i=1}^{r} \beta_i L_D(X-\alpha_i),$$

c'est-à-dire :

$$\frac{D(R)}{R} = \frac{D(c)}{c} + \sum_{i=1}^{r} \beta_i \frac{D(X-\alpha_i)}{X-\alpha_i}.$$

II.2 – Construction et extension de dérivations.

15. Le polynôme $P = X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ est de degré 2 et sans racine dans $\mathbb{F}_2$ (vérification immédiate : $P(0) = P(1) = 1 \neq 0$), donc il est irréductible sur ce corps. On en déduit que l'anneau quotient $\mathbb{F}_2[X]/(P)$ est un corps ; il est de dimension 2 sur $\mathbb{F}_2$ et une base est $(\overline{1}, \overline{X})$ (voir la résolution de la question 1.(c)), ce qui permet de constater qu'il est de cardinal $2^2 = 4$. C'est donc le corps $\mathbb{F}_4$.

En notant $j = \overline{X}$, on a bien $j^2 + j + 1 = 0$ puisque $\overline{P} = \overline{0}$ (on identifie canoniquement 0 et 1 et leurs classes dans $\mathbb{F}_2[X]/(P)$), et $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[j] = \mathbb{F}_2(j)$ puisqu'une base de $\mathbb{F}_4$ sur $\mathbb{F}_2$ est $(1, j)$ d'après ce qu'on a dit plus haut.

On a : $j^3 - 1 = (j-1)(1 + j + j^2) = 0$, donc : $j^3 = 1$ (on pouvait aussi utiliser le théorème de Lagrange dans le groupe multiplicatif $\mathbb{F}_4^*$). On a donc :

$$0 = D(1) = D(j^3) \overset{(q.\,12)}{=} 3j^2 D(j) = j^2 D(j).$$

Comme $j^2 \neq 0$ (on a $j \neq 0$ et un corps est intègre), on a : $D(j) = 0$. Or $D(0) = D(1) = 0$, et enfin : $D(j+1) = D(j) + D(1) = 0$. On a calculé les valeurs de D en les quatre éléments de $\mathbb{F}_4$; on en déduit que si D est une dérivation sur $\mathbb{F}_4$, alors elle est nulle (et réciproquement l'application nulle est clairement une dérivation), ce qui conclut : l'ensemble des dérivations sur $\mathbb{F}_4$ ne contient que l'application nulle.

Cette question est un cas particulier de la suivante, qui propose une autre résolution.

Autres constructions possibles de j. On rappelle que $\mathbb{F}_4$ est le corps de décomposition de $X^4 - X = X(X^3 - 1) = X(X-1)(X^2 + X + 1)$ sur $\mathbb{F}_2$. En particulier $X^2 + X + 1$ est scindé sur $\mathbb{F}_4$ et admet une racine dans ce corps que l'on note j. Elle est distincte de 1. Le groupe $\langle 1, j \rangle$ engendré par 1 et j est de cardinal supérieur à 3 puisqu'il contient 0, 1 et j, donc par le théorème de Lagrange on doit avoir : $\mathbb{F}_4 = \langle 1, j \rangle = \mathbb{F}_2[j]$.

On pouvait aussi rappeler que le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique et noter j un générateur de $\mathbb{F}_4^*$. On a : $\mathbb{F}_4 = \{0\} \cup \mathbb{F}_4^*$, ce qui permet de constater aisément que $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[j]$, et de plus l'égalité $0 = j^3 - 1 = (j-1)(j^2 + j + 1)$ implique que $j^2 + j + 1 = 0$ (comme j n'est pas d'ordre 1, on a $j - 1 \neq 0$).

16. Soit p la caractéristique de $\mathbb{F}_q$. On se souvient que q est une puissance de p : en particulier p divise q.

Soit D une dérivation sur $\mathbb{F}_q$. Pour tout $x \in \mathbb{F}_q$ on a : $x^q = x$ (en effet $\mathbb{F}_q$ est par définition l'ensemble des racines de $X^q - X \in \mathbb{F}_p[X]$). On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{F}_q, \quad D(x) = D(x^q) \overset{(q.12)}{=} q \cdot \left(x^{q-1} D(x)\right) = 0.$$

On conclut donc comme dans la question précédente que l'ensemble des dérivations sur $\mathbb{F}_q$ ne contient que l'application nulle.

Autre démonstration. En appliquant le théorème de Lagrange au morphisme $L_D : \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{F}_q$ de la question 14.(a), on sait que le cardinal de $\mathrm{Im}(L_D)$ divise $\mathrm{card}(\mathbb{F}_q) = q$. Cependant il divise aussi $\mathrm{card}(\mathbb{F}_q^*) = q - 1$ par l'identité :

$$\mathrm{card}(\mathbb{F}_q^*) = \mathrm{card}(\ker(L_D))\mathrm{card}(\mathrm{Im}(L_D)),$$

déduite du théorème de Lagrange et du théorème d'isomorphisme. Comme q et $q-1$ sont premiers entre deux, on en déduit que l'image de L_D est de cardinal 1, réduite à l'élément neutre de $\mathbb{F}_q$. C'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{F}_q^*$, $\frac{D(x)}{x} = 0$, ce dont on déduit aisément que D est la dérivation nulle (on a bien $D(0) = 0$ par ailleurs).

17. Tout d'abord, Φ^{-1} existe bien par bijectivité de Φ. Soit $(u, v) \in (K')^2$. L'application D' va bien de K' dans lui-même. Comme, Φ, Φ^{-1} et D sont des morphismes de groupes de $(K, +)$ dans $(K, +)$ (en tant que morphismes de corps et dérivation respectivement), leur composition l'est aussi, donc : $D'(u + v) = D'(u) + D'(v)$. Puisque Φ et Φ^{-1} sont des morphismes de corps, on a aussi :

$$\begin{aligned} D'(uv) = \Phi^{-1}\left(D(\Phi(u)\Phi(v))\right) &= \Phi^{-1}\left(D(\Phi(u))\Phi(v) + \Phi(u)D(\Phi(v))\right) \\ &= \Phi^{-1}\left(D(\Phi(u))\right)\Phi^{-1}(\Phi(v)) + \Phi^{-1}(\Phi(u))\Phi^{-1}\left(D(\Phi(v))\right) \\ &= \Phi^{-1}\left(D(\Phi(u))\right)v + u\Phi^{-1}\left(D(\Phi(v))\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire : $D'(uv) = D'(u)v + uD'(v)$. Ces deux identités démontrent que D' est une dérivation sur K'. De plus, pour tout $u \in K'$:

$$u \in K'_{\mathrm{cst}} \iff D'(u) = 0 \overset{(\Phi\text{ bij.})}{\iff} D(\Phi(u)) = \Phi(0) = 0 \iff \Phi(u) \in K_{\mathrm{cst}} \iff u \in \Phi^{-1}(K_{\mathrm{cst}}),$$

donc : $K'_{\mathrm{cst}} = \Phi^{-1}(K_{\mathrm{cst}})$.

18. Remarquons que si D_B est une dérivation sur B prolongeant D, alors la formule de dérivation d'un quotient (démontrée à la question 12) démontre qu'on doit avoir :

$$\forall (a, b) \in A \times (A \backslash \{0\}), \quad D_B\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{D_B(a)b - aD_B(b)}{b^2} = \frac{D(a)b - aD(b)}{b^2},$$

ce qui la détermine de manière unique.
Réciproquement, prolongeons la dérivation D de A en une dérivation sur son corps des fractions B en posant :

$$\forall (a,b) \in A \times (A\backslash\{0\}), \quad D_B\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{D(a)b - aD(b)}{b^2} \in B,$$

cette définition étant bien sûr motivée par ce qu'on vient de dire. Vérifions qu'elle est correctement définie, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la façon d'écrire une fraction sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $(a,b) \in A \times (A\backslash\{0\})$. Si l'on a : $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$, avec a, b, p et q des éléments de A (non nuls aux dénominateurs), alors : $aq = bp$ $(*)$ et donc en dérivant cette égalité : $aD(q) + D(a)q = bD(p) + D(b)p$ $(\dagger)$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
& \frac{D(a)b - aD(b)}{b^2} = \frac{D(p)q - pD(q)}{q^2} \\
\iff & (D(a)q)(qb) - aD(b)q^2 = (bD(p))(bq) - pD(q)b^2 \\
\iff & (D(a)q - bD(p))(bq) = aD(b)q^2 - pD(q)b^2 \\
\iff & (D(b)p - aD(q))(bq) = (aq)D(b)q - bD(q)(bp) && (\dagger) \\
\iff & (D(b)p - aD(q))(bq) = (bp)\left(D(b)q - bD(q)\right) && (*) \\
\iff & abqD(q) = b^2pD(q),
\end{aligned}$$

ce qui est vrai par $(*)$ (que l'on multiplie par $bD(q)$). Ainsi, pour toute fraction u, la formule ci-dessus définit correctement $D_B\,(u)$.
Cela définit une application $D_B : B \to B$. Démontrons que c'est une dérivation sur B. Rappelons que sa restriction à A en est une : nous allons nous en servir. Soient u et v deux fractions de B. Il est possible de leur choisir un dénominateur commun : écrivons donc $u = \frac{a}{c}$ et $v = \frac{b}{c}$ avec a, b et c des éléments de A tels que c soit non nul. On a :

$$\begin{aligned}
D_B(u+v) = D_B\left(\frac{a+b}{c}\right) &= \frac{D(a+b)c - (a+b)D(c)}{c^2} \\
&= \frac{D(a)c + D(b)c - aD(c) - bD(c)}{c^2} \\
&= \frac{D(a)c - aD(c)}{c^2} + \frac{D(b)c - bD(c)}{c^2},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire : $D_B(u+v) = D_B(u) + D_B(v)$, et :

$$\begin{aligned}
D_B(uv) = D_B\left(\frac{ab}{c^2}\right) &= \frac{D(ab)c^2 - (ab)D(c^2)}{c^4} \\
&= \frac{D(a)bc + aD(b)c - 2abD(c)}{c^3} \\
&= \frac{D(a)c - aD(c)}{c^2}\frac{b}{c} + \frac{a}{c}\frac{D(b)c - bD(c)}{c^2},
\end{aligned}$$

d'où : $D_B(uv) = D_B(u)v + uD_B(v)$, ce qui conclut la démonstration que D_B est une dérivation sur B, et qu'elle est l'unique à prolonger D.

19. Démontrons d'abord que $P \mapsto P^D$ est une dérivation sur $K[X]$: si $P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i X^i$ sont deux polynômes quelconques de $K[X]$ (les suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ étant presque nulles), alors :

$$(P+Q)^D = \sum_{i=0}^{+\infty} D(a_i + b_i)X^i = \sum_{i=0}^{+\infty} D(a_i)X^i + \sum_{i=0}^{+\infty} D(b_i)X^i = P^D + Q^D,$$

et :

$$(PQ)^D = \sum_{i=0}^{+\infty} D\left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right) X^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} D(a_j) b_{i-j}\right) X^i + \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j D(b_{i-j})\right) X^i,$$

et l'on reconnaît $P^D Q + PQ^D$ dans le membre de droite, d'où : $(PQ)^D = P^D Q + PQ^D$. Ainsi $P \mapsto P^D$ est une dérivation sur $K[X]$. Par la question 18, elle se prolonge en une dérivation D' sur $K(X)$. En utilisant l'isomorphisme $\tilde{\Phi} : R \mapsto R(x)$ entre $K(X)$ et $K(x)$ (voir la question 1.(b)) et le résultat de la question 17, on obtient une dérivation $\widehat{D} = \tilde{\Phi}^{-1} \circ D' \circ \tilde{\Phi}$ sur $K(x) = L$ dont la restriction à $K[x]$ est $P(x) \mapsto P^D(x)$: ce qu'il fallait démontrer.

On remarque que si P est un élément de K (c'est-à-dire un polynôme constant), alors on a sobrement : $P^D = D(P)$, donc : $\widehat{D}_{|K} = D$. On a démontré que $\widehat{D}$ est un prolongement de D à L.

20. Comme K est de caractéristique nulle, par la question 3 on a : $\mu_x'(x) \neq 0$. Il suffit donc de considérer :

$$a = -\frac{\mu_x^D(x)}{\mu_x'(x)}.$$

C'est un élément de $K(x) = K[x]$, donc il s'écrit sous la forme $a = Q(x)$ avec $Q \in K[X]$: d'où le résultat.

21. Soit $P \in K[X]$. On a :

$$\left((\mu_x P)^D + Q \cdot (\mu_x P)'\right)(x) = \mu_x^D(x)P(x) + \underbrace{\mu_x(x)P^D(x)}_{=0} + Q(x)\mu_x'(x)P(x) + \underbrace{Q(x)\mu_x(x)P'(x)}_{=0},$$

et par la question précédente on a : $\mu_x^D(x) + Q(x)\mu_x'(x) = 0$, donc :

$$\left((\mu_x P)^D + Q \cdot (\mu_x P)'\right)(x) = \left(\mu_x^D(x) + Q(x)\mu_x'(x)\right) P(x) = 0.$$

Ainsi $(\mu_x P)^D + Q \cdot (\mu_x P)' \in K[X]$ est un polynôme annulateur de x, donc μ_x divise ce polynôme. Cela démontre bien que l'idéal $\mu_x K[X]$ est stable par $P \mapsto P^D + Q \cdot P'$.

Par le théorème de factorisation des morphismes, le morphisme de groupes additif suivant :

$$\begin{array}{ccc} K[X] & \to & K[X]/(\mu_x) \\ P & \mapsto & \overline{P^D + Q \cdot P'} \end{array}$$

se factorise en une application $\overline{P} \mapsto \overline{P^D + Q \cdot P'}$ de $K[X]/(\mu_x)$ dans lui-même. C'est une dérivation sur $K[X]/(\mu_x)$ puisque $P \mapsto P^D$ et $P \mapsto P'$ en sont sur $K[X]$, et parce que l'ensemble des dérivations est stable par somme et multiplication externe (résultat admis en préambule de l'énoncé) ; les identités de dérivation restent bien entendu valables en passant au quotient.

Or on a démontré dans la question 1.(c) que $K[X]/(\mu_x)$ est isomorphe à $K[x] = L$ via l'application $\overline{P} \mapsto P(x)$. On en déduit, par conjugaison par cet isomorphisme, que l'application :

$$D' : \left\{ \begin{array}{ccc} L & \to & L \\ P(x) & \mapsto & P^D(x) + Q(x)P'(x) \end{array} \right.$$

est bien définie et est une dérivation sur L (question 17).

Comme la dérivée (usuelle) d'un polynôme constant est nulle, on a de plus (on identifie $u \in K$ et le polynôme de $K[X]$ constant égal à u) :

$$\forall u \in K, \quad D'(u) = u^D = D(u),$$

donc la restriction de D' à K est bien D.

22. On veut démontrer que l'application $D \mapsto D_{|K}$ est injective. Comme c'est évidemment une application linéaire, il suffit de démontrer que son noyau est trivial.

Considérons donc une dérivation D sur $K(x)$ dont la restriction à K est la dérivation nulle. Alors K est inclus dans le sous-corps des constantes, donc D est K-linéaire par la question 13. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $D(x^n) = D(x) \cdot nx^{n-1}$ par la question 12 : on en déduit que les applications K-linéaires $P \mapsto D(P(x))$ et $P \mapsto D(x)P'(x)$ coïncident sur la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui engendre $K[X]$. Donc :

$$\forall P \in K[X], \quad D(P(x)) = D(x)P'(x).$$

Prenons en particulier $P = \mu_x$. On obtient : $D(x)\mu_x'(x) = D(0) = 0$. Comme K est supposé de caractéristique nulle, on a $\mu_x'(x) \neq 0$ par la question 3, donc l'égalité précédente implique : $D(x) = 0$. L'égalité ci-dessus implique donc $D(P(x)) = 0$ pour tout $P \in K[X]$. Comme tout élément de $K(x)$ s'écrit sous la forme $P(x)$ avec $P \in K[X]$, cela démontre que D est nulle.

Ainsi $D \mapsto D_{|K}$ est injective puisque de noyau trivial, d'où le résultat.

Remarque. Le résultat reste valable si D est définie sur K à valeurs dans n'importe quel anneau intègre contenant K (nous en aurons besoin dans les questions suivantes où nous considérerons des restrictions de dérivations à K).

23. Fixons un corps L de caractéristique nulle (et non le corps K comme dans l'énoncé). Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, soit P_n la propriété :

> « Pour tout sous-corps K de L tel que : $\dim_K(L) \leqslant n$, et pour toute dérivation D sur K, il existe une unique dérivation $\widehat{D}$ sur L telle que : $\widehat{D}_{|K} = D$. »

Nous allons démontrer que P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$ par récurrence sur n.

Si $n = 1$, alors un sous-corps K de L vérifiant $\dim_K(L) \leqslant 1$ est nécessairement égal à L (en effet, dans ce cas (1) est une famille K-libre de cardinal maximal, donc une base, ce dont on déduit : $L = \mathrm{Vect}_K(1) = K$) : la propriété P_1 est alors trivialement vraie.

Passons à l'hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On suppose P_n. Soit K un sous-corps de L tel que : $\dim_K(L) \leqslant n+1$, et soit D une dérivation sur K. On veut démontrer l'existence et unicité d'un prolongement de D à L. Si $K = L$, alors il n'y a rien à raconter. Supposons donc l'existence d'un élément $x \in L\backslash K$, et posons : $K' = K(x)$. Par les questions précédentes 21 et 22, il existe un unique prolongement de D en une dérivation D' sur K' (notons que K est de caractéristique nulle puisqu'il est inclus dans L qui l'est).

De plus, comme K est strictement inclus dans K', on a : $\dim_K(K') > 1$, donc par la formule de multiplicativité des degrés admise dans le préambule de l'énoncé on a :

$$\dim_{K'}(L) = \frac{\dim_K(L)}{\dim_K(K')} < \dim_K(L) \leqslant n+1,$$

donc : $\dim_{K'}(L) \leqslant n$. On peut donc appliquer P_n : la dérivation D' se prolonge en une unique dérivation $\widehat{D}$ sur L.

Ceci démontre l'existence du prolongement, et il est unique puisque, si l'on note $\tilde{D}$ une autre dérivation sur L qui prolonge D, sa restriction à K' doit être égale à $\widehat{D}_{|K'}$ (par unicité du prolongement de D en une dérivation sur K'), c'est-à-dire à D' : par unicité du prolongement de D', on conclut : $\tilde{D} = \widehat{D}$.

Ceci vaut pour tout corps $K \subseteq L$ tel que : $\dim_K(L) \leqslant n+1$, ce qui démontre P_{n+1} et donc l'hérédité de la propriété étudiée.

Par principe de récurrence, on a P_n pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. C'est donc en particulier vrai pour le corps différentiel (K, D) de l'énoncé, d'où le résultat : si L/K est de dimension finie, alors il existe une unique dérivation D' sur L telle que : $D'_{|K} = D$.

Remarque. La caractéristique nulle est uniquement utilisée pour avoir $\mu_x'(x) \neq 0$ dans la question précédente. Cette propriété est aussi valable dans les corps finis (question 3). Ainsi il y a également unicité des prolongements des dérivations dans les extensions finies des corps finis (autrement dit dans les extensions de corps finis). Cela aurait pu servir dans la question 16 : voir aussi la remarque de la question 25.

24. Comme L est de dimension finie sur K, il existe une K-base $(a_1, \ldots, a_n)$ de L. Les a_i sont algébriques sur K par la question 1.(b) (puisque $K(a_i)$ est inclus dans L qui est de dimension finie), donc ils le sont également sur $K(X)$. Par la formule de multiplicativité des degrés et par récurrence, on en déduit aisément que $L(X) = K(a_1, \ldots, a_n, X)$ est de dimension finie sur $K(X)$. Par la question précédente, il existe une unique dérivation sur $L(X)$ qui prolonge D : d'où le résultat.

25. Notons 0_{Der} la dérivation nulle sur K. Soit D une dérivation sur K. Comme K est de caractéristique nulle, c'est aussi le cas de $K_{\mathrm{cst}} \subseteq K$, donc : $\mathbb{Q} \subseteq K_{\mathrm{cst}}$. On a donc : $D_{|\mathbb{Q}} = 0$. Ainsi D et 0_{Der} sont deux prolongements de la dérivation nulle sur $\mathbb{Q}$. Par unicité (question 23), on a donc : $D = 0_{\mathrm{Der}}$.

    On a démontré que l'ensemble des dérivations sur K ne contient que la dérivation nulle.

    Remarque. On peut adapter ce raisonnement au cas des corps finis (voir la remarque à la fin de la résolution de la question 23, qui légitime cette possibilité). On retrouve ainsi le résultat de la question 16.

26. Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(L)$. L'application $\sigma^{-1} \circ D \circ \sigma$ est une dérivation sur L d'après la question 17, qui coïncide sur K avec D (puisque σ fixe les éléments de K et que $D(K) \subseteq K$ par hypothèse sur l'extension L/K). Par unicité du prolongement de $D_{|K}$ en une dérivation sur L, on a donc : $\sigma^{-1} \circ D \circ \sigma = D$, d'où le résultat : $D \circ \sigma = \sigma \circ D$.

27. L'élément $X \in \mathbb{F}_q(X)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(X^q)$ puisqu'il est racine de $T^q - X^q \in \mathbb{F}_q(X^q)[T]$. Par la question 1.(c), le corps $\mathbb{F}_q(X^q)(X)$ est de dimension finie sur $\mathbb{F}_q(X^q)$. Or, en utilisant convenablement la propriété de minimalité de $\mathbb{F}_q(X^q)(X)$ et de $\mathbb{F}_q(X)$, on démontre aisément l'égalité : $\mathbb{F}_q(X^q)(X) = \mathbb{F}_q(X)$. Ainsi $\mathbb{F}_q(X)/\mathbb{F}_q(X^q)$ est une extension finie.

    Malgré cela, la dérivation nulle admet deux prolongements distincts de $\mathbb{F}_q(X^q)$ à $\mathbb{F}_q(X)$: l'application nulle et la dérivation usuelle notée ∂ dans l'énoncé. Le fait que ∂ soit un prolongement de 0_{Der} découle de la question 3, qui implique que le corps des constantes de ∂ est $\mathbb{F}_q(X^p)$ (nous n'avions étudié que des polynômes, mais cela s'étend sans peine aux fractions rationnelles). On a : $\mathbb{F}_q(X^q) \subseteq \mathbb{F}_q(X^p)$, donc : $\partial_{|\mathbb{F}_q(X^q)} = 0_{\mathrm{Der}}$.

    Cependant $\partial : \mathbb{F}_q(X) \to \mathbb{F}_q(X)$ n'est pas nulle, puisque : $\partial(X) = 1 \neq 0$. Cela démontre l'existence de deux prolongements distincts de 0_{Der} en une dérivation de $\mathbb{F}_q(X)$.

    Remarque. On peut démontrer (grâce au critère d'Eisenstein par exemple) que $T^q - X^q$ est irréductible sur $\mathbb{F}_q(X^q)$ et qu'en conséquence, $\mathbb{F}_q(X)$ est le corps de rupture de ce polynôme. On en déduit que l'extension $\mathbb{F}_q(X)/\mathbb{F}_q(X^q)$ est de dimension q.

28. Notons $\Psi : \mathrm{Der}(\mathbb{F}_q(X)) \to \mathbb{F}_q(X)$ l'application $D \mapsto D(X)$. Elle est $\mathbb{F}_q(X)$-linéaire. Démontrons qu'elle est bijective.

    Pour l'injectivité, démontrons que le noyau est trivial : soit $D \in \mathrm{Der}(\mathbb{F}_q(X))$ tel que : $\Psi(D) = 0$. La première identité de la question 12 implique donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $D(X^n) = 0$. Comme D est $\mathbb{F}_q(X)_{\mathrm{cst}}$-linéaire et que $\mathbb{F}_q \subseteq \mathbb{F}_q(X)_{\mathrm{cst}}$ (imiter le raisonnement de la question 16), elle est $\mathbb{F}_q$-linéaire en plus d'être nulle sur la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$: elle est donc nulle sur $\mathbb{F}_q[X]$. Par la question 18, cela s'étend aux corps des fractions, donc : $D = 0_{\mathrm{Der}}$. D'où : $\ker(\Psi) = \{0_{\mathrm{Der}}\}$, et Ψ est injectif.

    Pour la surjectivité : soit $R \in \mathbb{F}_q(X)$. On veut construire une dérivation D telle que : $D(X) = R$. Il suffit de poser, pour tout $P \in \mathbb{F}_q(X)$:

$$D(P) = R \cdot P'.$$

    C'est bien sûr une dérivation puisque $P \mapsto P'$ en est une (et $\mathrm{Der}(\mathbb{F}_q(X))$ est un $\mathbb{F}_q(X)$-espace vectoriel), et on a : $D(X) = R$. Cela démontre que toute fraction rationnelle $R \in \mathbb{F}_q(X)$ admet un antécédent par Ψ, qui est donc surjective.

Ainsi Ψ est linéaire et bijective, donc un isomorphisme d'espace vectoriel. En particulier il préserve les dimensions, donc :

$$\dim_{\mathbb{F}_q(X)}\left(\mathrm{Der}(\mathbb{F}_q(X))\right) = \dim_{\mathbb{F}_q(X)}(\mathbb{F}_q(X)) = 1.$$

N'importe quelle dérivation non nulle fournit une base de $\mathrm{Der}(\mathbb{F}_q(X))$: par exemple la dérivation usuelle ∂.

Partie III

III.1 – Fonctions transcendantes.

29. (a) Posons $\mu_v = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$. Les a_i sont dans K. On a : $\mu_v(v) = 0$, et donc :

$$0 = D(0) = D(\mu_v(v)) = D(v^n) + \sum_{i=0}^{n-1} D\left(a_i v^i\right) = nD(v)v^{n-1} + D(v)\sum_{i=0}^{n-1} a_i i v^{i-1} + \sum_{i=0}^{n-1} D(a_i)\, v^i,$$

c'est-à-dire : $0 = D(v)\mu_v'(v) + \mu_v^D(v) = D(u)v\mu_v'(v) + \mu_v^D(v)$. Autrement dit : le polynôme $D(u)X\mu_v' + \mu_v^D \in K[X]$ admet v pour racine, donc μ_v divise ce polynôme. Or il est de degré inférieur ou égal à celui de μ_v, donc cette relation de divisibilité implique l'existence de $\alpha \in K$ tel que : $D(u)X\mu_v' + \mu_v^D = \alpha\mu_v$. En comparant le coefficient de X^n dans chaque membre de l'égalité, on a : $D(u)n = \alpha$. D'où l'identité demandée :

$$D(u)X\mu_v' + \mu_v^D = nD(u)\mu_v.$$

En comparant le coefficient constant dans chaque membre de l'égalité, on obtient :

$$D(a_0) = nD(u)a_0,$$

d'où : $nD(u) = L_D(a_0)$, où L_D est l'application de la question 14.(a). Pour diviser par a_0, encore fallait-il s'assurer que $a_0 \neq 0$: dans le cas contraire, X diviserait le polynôme irréductible μ_v et on aurait donc : $\mu_v = X$. Absurde puisque v est non nul.
Ceci étant dit, on rappelle que l'on a : $D(u) = \frac{D(v)}{v} = L_D(v)$, donc par la propriété de morphisme de L_D on a :

$$L_D(v^n) = L_D(a_0).$$

Comme le noyau de L_D est $L_{\text{cst}}^* = K_{\text{cst}}^*$ (question 14.(a)), cette égalité est vérifiée si et seulement s'il existe $c \in K_{\text{cst}}^*$ tel que : $v^n = ca_0$. Comme K_{cst} est inclus dans K qui est stable par produit, on a bien : $v^n \in K$, d'où le résultat.

(b) S'il existe $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $a \in K$ tels que : $v^n = a$, alors $X^n - a \in K[X]$ admet v pour racine et est un polynôme non nul, donc v est algébrique sur K.

30. (a) Raisonnons par l'absurde et supposons l'existence de $S \in \mathbb{C}(T)$ tel que : $\frac{R'}{R} = S'$. On a $R' \neq 0$ (car R n'est pas constante) donc $S' \neq 0$ également. Or, comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos par le théorème fondamental de l'algèbre, la décomposition en éléments simples de S est de la forme :

$$S = P + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{s_{i,j}}{(T-a_i)^j},$$

avec $P \in \mathbb{C}[T]$, les $s_{i,j}$ et a_i des complexes (tels que $s_{i,n_i} \neq 0$) et les n_i des entiers naturels non nuls (on dit que n_i est l'ordre du pôle de S en a_i). Ce qui importe, pour la suite du raisonnement par l'absurde, est la valeur maximale des exposants au dénominateur (soit donc l'ordre des pôles) : après dérivation on a :

$$S' = P' - \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{j s_{i,j}}{(T-a_i)^{j+1}},$$

avec $s_{i,n_i} \neq 0$ et $n_i + 1 \geqslant 2$ pour tout i. On en déduit en particulier que **la dérivée d'une fraction rationnelle (non nulle) n'a pas de pôle simple**.

Cette observation est cruciale. La question 14.(b) (appliquée à la dérivation usuelle) démontre en effet qu'au contraire, les pôles d'une fraction rationnelle de la forme $\frac{R'}{R}$ sont simples :

$$\frac{R'}{R} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\beta_i}{T-\alpha_i},$$

avec des β_i entiers et des α_i complexes. La décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle étant unique, l'égalité $\frac{R'}{R} = S'$ est contradictoire.

Par l'absurde, on a démontré que pour tout $R \in \mathbb{C}(T)\backslash\mathbb{C}$, il n'existe pas $S \in \mathbb{C}(T)$ tel que : $\frac{R'}{R} = S'$.

(b) Soit $S \in \mathbb{C}(T)\backslash\mathbb{C}$. Démontrons que e^S est transcendante sur $\mathbb{C}(T)$. D'après la question 29.(a), il suffit de démontrer que $\left(e^S\right)^n$ n'est pas dans $\mathbb{C}(T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Or s'il existe $R \in \mathbb{C}(T)$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tels que : $\left(e^S\right)^n = R$, alors R est non nul (c'est une exponentielle) et de plus :

$$(nS)' = n\frac{\left(e^S\right)'}{e^S} = nL_\partial\left(e^S\right) \overset{(q.\,14.(a))}{=} L_\partial\left(\left(e^S\right)^n\right) = L_\partial\left(R\right) = \frac{R'}{R},$$

et R n'est pas dans $\mathbb{C}$ vu que sa dérivée est non nulle (en effet S n'est pas constante). Or on a démontré à la question précédente que $\frac{R'}{R}$ ne peut s'écrire comme la dérivée d'une fraction rationnelle : c'est contradictoire.

Par l'absurde : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\left(e^S\right)^n \notin \mathbb{C}(T)$, donc par la question 29.(a) l'exponentielle e^S est transcendante sur $\mathbb{C}(T)$.

Remarque. L'identité $\left(e^S\right)^n = e^{nS}$ est fautive a priori : les deux membres peuvent différer d'une constante multiplicative ! On le justifie grâce à : $(e^{nS})' = nS'e^{nS} = (nS)'e^{nS}$, et :

$$\left(\left(e^S\right)^n\right)' = n\left(e^S\right)'\left(e^S\right)^{n-1} = (nS)'\left(e^S\right)^n \ ;$$

on a donc : $\frac{\left(\left(e^S\right)^n\right)'}{\left(e^S\right)^n} = \frac{\left(e^{nS}\right)'}{e^{nS}}$, et par la question 14.(a) il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}(T, e^S)^*_{\text{cst}} = \mathbb{C}(T)^*_{\text{cst}} = \mathbb{C}^*$ tel que : $\left(e^S\right)^n = \lambda e^{nS}$.

31. On va imiter le raisonnement de la question 29.(a). Supposons que v est algébrique sur K et posons $\mu_v = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$. Le même raisonnement qu'à la question 29.(a) démontre que μ_v divise :

$$D(v)\mu_v' + \mu_v^D = D(v)\left(nX^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i i X^{i-1}\right) + \sum_{i=0}^{n-1} D(a_i)X^i.$$

Ce polynôme est dans $K[X]$ car $D(v) = \frac{D(u)}{u} \in K$, et de degré strictement inférieur à celui de μ_v : la relation de divisibilité ci-dessus implique donc : $\frac{D(u)}{u}\mu_v' + \mu_v^D = 0$. En regardant le coefficient de X^{n-1} dans cette égalité on obtient :

$$nD(v) + D(a_{n-1}) = 0.$$

Comme D est un morphisme additif, cela donne : $D(nv + a_{n-1}) = 0$, et donc : $nv + a_{n-1} \in L_{\text{cst}}$. Or L/K est un surcorps différentiel donc : $L_{\text{cst}} = K_{\text{cst}}$. On en déduit :

$$nv + a_{n-1} \in K_{\text{cst}} \subseteq K,$$

et comme $a_{n-1} \in K$ et $n \neq 0$, cela démontre : $v \in K$, d'où le résultat.

Remarque. C'est la contraposée qui est intéressante : si $v \in L \backslash K$, alors v est transcendant sur K. Par exemple $\ln(T)$ est transcendant sur $\mathbb{C}(T)$.

III.2 – Le théorème principal.

32. (a) On a la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{1+T^2} = \frac{1}{2i}\frac{1}{T-i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{T+i}.$$

Utilisons donc le résultat admis de l'énoncé pour introduire une extension L du corps différentiel $\mathbb{C}(T)$ telle que les logarithmes $\ell_1 = \ln(T-i)$ et $\ell_2 = \ln(T+i)$ appartiennent à L. On a donc :

$$\left(\frac{1}{2i}(\ell_1 - \ell_2)\right)' = \frac{1}{1+T^2},$$

donc $\dfrac{1}{1+T^2}$ admet une primitive élémentaire ; en effet, $\frac{1}{2i}(\ell_1 - \ell_2)$ appartient à $\mathbb{C}(T, \ell_1, \ell_2)$ qui est une extension élémentaire de $\mathbb{C}(T)$, puisqu'on peut écrire la suite d'extensions de corps suivante :

$$\mathbb{C}(T) \overset{\text{(log.)}}{\subseteq} \mathbb{C}(T, \ell_1) \overset{\text{(log.)}}{\subseteq} \mathbb{C}(T, \ell_1, \ell_2).$$

On aurait aussi pu introduire un logarithme de $\frac{T-i}{T+i}$ et vérifier que $\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{T-i}{T+i}\right)$ admet $\frac{1}{1+T^2}$ pour dérivée. L'avantage est qu'ainsi, une seule extension logarithmique suffit.

On raisonne de même avec $\frac{\sin(T)}{1+(\cos(T))^2}$: on introduit un logarithme de $\frac{\cos(T)+i}{\cos(T)-i} \in \mathbb{C}(T, e^{iT})$ (qui existe par le résultat admis de l'énoncé) et on constate que :

$$\ell_3 = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{\cos(T)+i}{\cos(T)-i}\right)$$

vérifie : ${\ell_3}' = \frac{\sin(T)}{1+(\cos(T))^2}$. Cela nécessite de savoir calculer la dérivée de $\cos(T)$: la formule de dérivation d'un inverse, démontrée à la question 11, donne : $\left(\frac{1}{e^{iT}}\right)' = -\frac{ie^{iT}}{(e^{iT})^2} = -\frac{i}{e^{iT}}$, et on en déduit alors facilement que la dérivée de $\cos(T)$ est $-\sin(T)$.

(b) Pour le sens donné à la racine carrée, il suffit de considérer le corps de décomposition M de $X^2 - \text{Arctan}(\cos(T))$ sur $\mathbb{C}(\text{Arctan}(\cos(T)))$; l'unicité du prolongement de ∂ – voir la question 23 – assure que la dérivation sur M est nécessairement, toujours, la dérivation usuelle.

On reprend les notations de la question précédente. On a alors la suite d'extensions de corps :

$$\mathbb{C}(T) \overset{\text{(exp.)}}{\subseteq} \mathbb{C}(T, e^{iT}) \overset{\text{(log.)}}{\subseteq} \mathbb{C}(T, e^{iT}, \ell_3) \overset{\text{(finie)}}{\subseteq} M,$$

qui démontre que $\sqrt{\text{Arctan}(\cos(T))}$ appartient à une extension élémentaire de $\mathbb{C}(T)$. D'où le résultat.

33. Supposons que le lemme principal est démontré et démontrons le théorème principal. Soit $f \in K$ une fonction admettant une primitive élémentaire. Il existe donc une extension L/K élémentaire et une suite de corps : $K = K_0 \subseteq K_1 \cdots \subseteq K_m = L$, telle que K_{i+1}/K_i soit finie, ou logarithmique, ou exponentielle pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$, et $g \in L$ tel que : $f = D(g)$.

En vue d'appliquer le lemme, démontrons d'abord que pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$, l'extension K_{i+1}/K_i est différentielle. Nous devons vérifier deux choses : $D(K_i) \subseteq K_i$, et : $K_{i,\text{cst}} = K_{i+1,\text{cst}}$. La première vérification est la plus subtile et nous procédons par récurrence sur i.

Si $i = 0$, alors nous savons que $D(K_0) \subseteq K_0$ puisque $K_0 = K$ et L/K est une extension différentielle. Introduisons donc $i \in [\![0, m-1]\!]$ tel que : $D(K_i) \subseteq K_i$, et vérifions que l'on a également l'inclusion $D(K_{i+1}) \subseteq K_{i+1}$. Cela dépend des cas :

— si K_{i+1}/K_i est finie, alors par hypothèse de récurrence $D_{|K_i}$ est une dérivation sur K_i, et par la question 23 il existe un unique prolongement de $D_{|K_i}$ en une dérivation $D' : K_{i+1} \to K_{i+1}$, or $D_{|K_{i+1}} : K_{i+1} \to L$ est un tel prolongement, donc par unicité : $D_{|K_{i+1}} = D'$, ce qui assure : $D(K_{i+1}) = D'(K_{i+1}) \subseteq K_{i+1}$ (comme indiqué en remarque de la question 24, il n'est pas gênant que $D_{|K_{i+1}}$ soit <u>a priori</u> à valeurs dans L, et non K_{i+1}, pour appliquer cet argument d'unicité : il suffit de constater que c'est à valeurs dans un anneau intègre) ;

— si K_{i+1}/K_i est logarithmique, alors il existe $v \in K_{i+1}$ et $u \in K_i^*$ tels que : $K_{i+1} = K_i(v)$, et : $D(v) = \frac{D(u)}{u}$; par hypothèse de récurrence on a : $D(u) \in K_i$, donc en particulier : $D(v) \in K_i \subseteq K_{i+1}$; la relation $D(v^n) = nv^{n-1}D(v)$ valable pour tout entier n implique que $D(v^n) \in K_{i+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$; par propriété d'additivité de D et formule de dérivation d'un produit, on en déduit que $D(K_{i+1}) \subseteq K_{i+1}$;

— si K_{i+1}/K_i est exponentielle, le raisonnement est analogue : on introduit $v \in K_{i+1}$ et $u \in K_i$ tels que : $K_{i+1} = K_i(v)$, et : $D(v) = D(u)v$; on démontre alors grâce au morphisme L_D de la question 14.(a) que $D(v^n) = nD(u)v^n \in K_{i+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et comme ci-dessus : $D(K_{i+1}) \subseteq K_{i+1}$;

d'où le résultat au rang $i+1$. Par principe de récurrence, on a $D(K_i) \subseteq K_i$ pour tout $i \in [\![0, m]\!]$.
Enfin, comme L/K est différentielle, on a : $L_{\text{cst}} = K_{\text{cst}}$, et comme :

$$\forall i \in [\![0, m-1]\!], \quad K_{\text{cst}} \subseteq K_{i,\text{cst}} \subseteq K_{i+1,\text{cst}} \subseteq L_{\text{cst}},$$

on a aussi : $\forall i \in [\![0, m-1]\!]$, $K_{i,\text{cst}} = K_{i+1,\text{cst}}$.
Le plus dur a été fait. Démontrons le théorème principal. Posons, pour tout $i \in [\![0, m]\!]$, la propriété P_i :

« L'élément f est une somme de Liouville dans K_{m-i} ».

L'égalité $f = D(g)$ avec $g \in L$ implique que f est une somme de Liouville dans $L = K_m$, donc on a P_0. De plus, si $i \in [\![0, m-1]\!]$ est un entier tel que f soit une somme de Liouville dans K_{m-i}, alors le lemme assure que f en est une dans K_{m-i-1}, étant donné que par hypothèse K_{m-i}/K_{m-i-1} est soit finie, soit logarithmique, soit exponentielle. Donc P_i implique P_{i+1} pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$.
Par principe de récurrence, on a P_i pour tout $i \in [\![0, m]\!]$, et en particulier on a P_m, donc f est une somme de Liouville dans $K_0 = K$: d'où le résultat.

III.3 – Le lemme principal pour les extensions finies.

34. Posons :

$$P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i,$$

avec n le degré de P. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in M$ ses racines comptées avec répétitions. Comme x appartient au corps engendré sur K par les racines de P, il existe $Q \in K(X_1, \ldots, X_n)$ tel que : $x = Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Considérons alors le polynôme :

$$R = \prod_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(T - Q(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)})\right).$$

Ce polynôme annule x (considérer le facteur correspondant à $\sigma = \mathrm{Id}$) et est scindé sur M. Démontrons qu'il appartient à $K[T]$. Pour cela, on considère le polynôme « générique » :

$$R_{\text{gen}}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(T - Q(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})\right).$$

Il est clairement un polynôme de $K[T](X_1, \dots, X_n)$ (car Q est à coefficients dans K) invariant par tout $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$, car l'application $S(X_1, \dots, X_n) \mapsto S(X_{\sigma'(1)}, \dots, X_{\sigma'(n)})$ est un automorphisme de corps et l'application $\sigma \mapsto \sigma' \circ \sigma$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ dans lui-même. Par le théorème fondamental des fractions symétriques, il existe $S \in K[T](X_1, \dots, X_n)$ tel que : $R_{\text{gen}}(X_1, \dots, X_n) = S(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$. Par les relations coefficients-racines, on en déduit :

$$R = R_{\text{gen}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = S(-b_{n-1}, \dots, (-1)^n b_0) \in K[T],$$

car les b_i appartiennent à K et S appartient à $K(X_1, \dots, X_n)$.

On a donc démontré l'existence d'un polynôme de $K[T]$ scindé sur M annulant x. Comme $\mu_{x,K}$ divise P qui est scindé sur M, le polynôme $\mu_{x,K}$ est également scindé sur M : d'où le résultat.

35. Si $\sigma : K(x) \to M$ est un morphisme de corps, alors :

$$\mu_{x,K}^{\sigma}(\sigma(x)) = \sum_{i=0}^{n} \sigma(a_i)(\sigma(x))^i = \sigma\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sigma(0) = 0,$$

donc $\sigma(x)$ est une racine de $\mu_{x,K}^{\sigma}$: d'où le résultat.

36. Notons que τ induit un isomorphisme de K dans K^{τ}. On notera abusivement $\tau^{-1} : K^{\tau} \to K$ l'isomorphisme réciproque ci-dessous.

L'application $\tilde{\sigma} : K[X] \to K^{\tau}(y)$ définie par $Q \mapsto Q^{\tau}(y)$ est un morphisme de K-algèbres de $K[X]$ dans $K^{\tau}[y]$ tel que $\tilde{\sigma}(X) = y$ (vérifications sans mystère, basées sur la propriété de morphisme de τ qui implique $(PQ)^{\tau} = P^{\tau}Q^{\tau}$ et $(P+Q)^{\tau} = P^{\tau} + Q^{\tau}$ pour tous polynômes P et Q). De plus :

$$\forall Q \in K[X], \quad \left(Q^{\tau}(y) = 0 \iff \mu_{x,K}^{\tau} \mid Q^{\tau} \iff \mu_{x,K} \mid Q\right).$$

Justifions brièvement ces deux équivalences. Pour la première, on note que $\mu_{x,K}^{\tau}$ admet y pour racine par définition et est irréductible sur K^{τ} : c'est donc le polynôme minimal de y sur K^{τ}. Pour la seconde équivalence, il suffit de prendre l'image par τ^{-1} dans une relation de divisibilité entre Q^{τ} et $\mu_{x,K}^{\tau}$.

En bref, le raisonnement ci-dessus démontre que le noyau de $\tilde{\sigma}$ est l'idéal engendré par $\mu_{x,K}$ et, par le théorème de factorisation, $\tilde{\sigma}$ induit un morphisme de $K[X]/(\mu_{x,K})$ dans $K^{\tau}(y)$ défini par $\overline{Q} \mapsto Q(y)$. En composant par l'isomorphisme de la question **1**, on obtient un morphisme de corps $\sigma : K(x) \to K^{\tau}(y)$ tel que :

$$\forall Q \in K[X], \quad \sigma(Q(x)) = Q^{\tau}(y).$$

En particulier : $\forall a \in K$, $\sigma_{x,y}(a) = \tau(a)$ (considérer les polynômes constants), et : $\sigma(x) = y$ (prendre $Q = X$, qui vérifie $Q^{\tau} = Q$ car $\tau(1) = 1$). On a construit un morphisme de corps σ de $K(x)$ dans $K^{\tau}(y)$ vérifiant les conditions requises.

L'unicité est claire, étant donné qu'un morphisme défini sur $K(x)$ est caractérisé par l'image de x et des éléments de K.

37. Notons d'abord qu'en appliquant la question précédente à $\tau = \mathrm{Id}$, nous avons l'existence, pour tout x dans M et tout y racine de $\mu_{x,K}$, d'un unique morphisme de corps de $K(x)$ dans $K(y)$ envoyant x sur y et dont la restriction à K est l'identité. Nous notons $\sigma_{x,y}$ ce morphisme ci-dessous.

Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, soit P_n la propriété :

> « Pour tout sous-corps K de M tel que M soit le corps de décomposition sur K d'un polynôme non constant de $K[X]$, pour tout $x \in M$ tel que : $\dim_{K(x)}(M) = n$, et pour toute racine y de $\mu_{x,K}$ il existe exactement $\dim_{K(x)}(M)$ automorphismes σ de $\mathrm{Aut}_K(M)$ qui prolongent $\sigma_{x,y}$. ».

Nous allons démontrer que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ par récurrence sur n, le cas $n = 1$ découlant immédiatement de ce qui précède car $M = K(x)$ dans ce cas (l'unique automorphisme à convenir est $\sigma_{x,y}$ lui-même).

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On suppose P_k pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Soit M/K une extension de corps telle que M soit le corps de décomposition sur K d'un polynôme P de $K[X]$ non constant, et soit $x \in M$ vérifiant : $\dim_{K(x)}(M) = n+1$. Soit y une racine de $\mu_{x,K}$, qui appartient à M par la question 34.

Comme : $\dim_{K(x)}(M) > 1$, il existe $\alpha \in M\backslash K(x)$. Notons que $\mu_{\alpha,K}$ est scindé sur M par la question 34, donc $\mu_{\alpha,K(x)}^{\sigma_{x,y}}$ également puisque ce polynôme divise $\mu_{\alpha,K}$ (remarquer que $\mu_{\alpha,K(x)}$ le divise, et prendre l'image par $\sigma_{x,y}$ dans une relation de divisibilité ; comme $\sigma_{x,y}$ fixe les éléments de K, on a $\mu_{\alpha,K}^{\sigma_{x,y}} = \mu_{\alpha,K}$). Considérons donc β une racine de $\mu_{\alpha,K(x)}^{\sigma_{x,y}}$, qui appartient à M d'après ce qu'on vient de rappeler. Notons aussi que M est aussi le corps de décomposition sur $K(x)$ de P car x appartient à M. On peut donc appliquer la question précédente (en remplaçant (K,τ,x,y) par $(K(x),\sigma_{x,y},\alpha,\beta)$) pour en déduire l'existence d'un unique morphisme de corps $\sigma_{\alpha,\beta}$ de $K(x)(\alpha)$ dans $K(x)^{\sigma_{x,y}}(\beta)$ qui prolonge $\sigma_{x,y}$. Comme $\sigma_{x,y}$ fixe K et envoie x sur y, le morphisme $\sigma_{\alpha,\beta}$ est en fait à valeurs dans $K(y)(\beta)$.

Enfin, la formule de multiplicativité des degrés implique :

$$\dim_{K(x)(\alpha)}(M) = \frac{\dim_{K(x)}(M)}{\dim_{K(x)}(K(x)(\alpha))} < \dim_{K(x)}(M) \leqslant n+1,$$

donc : $\dim_{K(x)(\alpha)}(M) \leqslant n$. On peut donc appliquer P_n, en remplaçant (K,x,y) par $(K(x),\alpha,\beta)$: il existe exactement $\dim_{K(x)(\alpha)}(M)$ automorphismes de $\mathrm{Aut}_K(M)$ qui prolongent $\sigma_{\alpha,\beta}$. Comme $\sigma_{\alpha,\beta}$ est lui-même un prolongement de $\sigma_{x,y}$, on obtient ainsi $\dim_{K(x)(\alpha)}(M)$ prolongements de $\sigma_{x,y}$ (et ce sont par ailleurs des éléments de $\mathrm{Aut}_K(M)$ puisque $\sigma_{x,y}$ fixe les éléments de K).

Notons-les $\sigma_{1,\beta},\dots,\sigma_{d,\beta}$ dans ce qui suit, avec $d = \dim_{K(x)(\alpha)}(M)$. Notons aussi $\beta_1,\dots,\beta_{d'}$ les racines de $\mu_{\alpha,K(x)}$: il y en a $d' = \deg(\mu_{\alpha,K(x)}) = \dim_{K(x)}(K(x)(\alpha))$ par la question 3. On a obtenu les prolongements suivants de $\sigma_{x,y}$ en des automorphismes de M :

$$\sigma_{i,\beta_j}, \quad (i,j) \in [\![1,d]\!] \times [\![1,d']\!].$$

Ils sont tous distincts : si $j \neq j'$, alors $\sigma_{i,\beta_j|K(x)} = \sigma_{\alpha,\beta_j}$ et $\sigma_{i',\beta_{j'}|K(x)} = \sigma_{\alpha,\beta_{j'}}$, et $\sigma_{\alpha,\beta_j} \neq \sigma_{\alpha,\beta_{j'}}$ (comparer les images de α) donc $\sigma_{i,\beta_j} \neq \sigma_{i',\beta_{j'}}$. Si $j = j'$, alors par construction $\sigma_{1,\beta_j},\dots,\sigma_{d,\beta_j}$ sont tous distincts et il n'y a rien à raconter.

Cela fournit donc dd' prolongements de $\sigma_{x,y}$. Par la formule de multiplicativité des degrés : $dd' = \dim_{K(x)}(M)$. Pour obtenir le résultat voulu, il suffit donc de justifier qu'il n'y a pas autre automorphisme que ceux que l'on vient de construire : si σ appartient à $\mathrm{Aut}_K(M)$ et prolonge $\sigma_{x,y}$, alors $\sigma(\alpha)$ est une racine de $\mu_{\alpha,K(x)}^{\sigma} = \mu_{\alpha,K(x)}^{\sigma_{x,y}}$, donc par les deux questions précédentes il existe $(i,j) \in [\![1,d]\!] \in [\![1,d']\!]$ tel que : $\sigma_{|K(x)(\alpha)} = \sigma_{i,\beta_j}$, ce qui conclut. Il n'y a pas d'autre prolongement que ceux déjà construits.

On a démontré qu'il existe $\dim_{K(x)}(M)$ automorphismes σ de $\mathrm{Aut}_K(M)$ qui prolongent $\sigma_{x,y}$. Par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, ce qu'il fallait démontrer (en effet $\sigma_{x,y}(x) = y$).

38. Soit $x \in M$. Notons $d = \deg(\mu_{x,K})$ et $x_1,\dots,x_d$ les racines de $\mu_{x,K}$. Rappelons que d'après la question 10 on a : $\mathrm{tr}_{M/K}(x) = \frac{\dim_K(M)}{d} \sum\limits_{i=1}^{d} x_i$. Or la question précédente permet de regrouper les

$\sigma \in \mathrm{Aut}_K(M)$ selon l'image de x (qui est une racine de $\mu_{x,K}$ par la question 35, donc égale à l'un des $x_1, \ldots, x_d$) :

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}_K(M)} \sigma(x) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{Aut}_K(M) \\ \sigma(x)=x_i}} \sigma(x) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{Aut}_K(M) \\ \sigma(x)=x_i}} x_i \overset{(q.37)}{=} \sum_{i=1}^{d} \dim_{K(x)}(M) x_i,$$

or la formule de multiplicativité des degrés (admise en préambule de l'énoncé) implique :

$$\dim_{K(x)}(M) = \frac{\dim_K(M)}{\dim_K(K(x))} \overset{(q.\,1.(c))}{=} \frac{\dim_K(M)}{\deg(\mu_{x,K})} = \frac{\dim_K(M)}{d}.$$

D'où le résultat :

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}_K(M)} \sigma(x) = \frac{\dim_K(M)}{d} \sum_{i=1}^{d} x_i = \mathrm{tr}_{M/K}(x).$$

Le raisonnement est en tous points analogue pour démontrer : $\mathrm{N}_{M/K}(x) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Aut}_K(M)} \sigma(x)$.

39. Notons que par définition de M, c'est un corps de décomposition sur K (ce qui permet d'appliquer les questions précédentes) et il contient g ainsi que tous les f_i. Soit $i \in I$. On a par la question précédente :

$$\mathrm{tr}_{M/K}\left(L_D(f_i)\right) = \mathrm{tr}_{M/K}\left(\frac{D(f_i)}{f_i}\right) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}_K(M)} \sigma\left(\frac{D(f_i)}{f_i}\right) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}_K(M)} \frac{\sigma\left(D(f_i)\right)}{\sigma(f_i)}.$$

Notons D' l'unique prolongement de $D_{|K}$ en une dérivation sur M (un tel prolongement existe par la question 23). L'unicité du prolongement assure que l'on a : $D'(f_i) = D(f_i)$, et par la question 26 on a : $\sigma \circ D' = D' \circ \sigma$, donc :

$$\mathrm{tr}_{M/K}\left(L_D(f_i)\right) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}_K(M)} \frac{D'\left(\sigma\left(f_i\right)\right)}{\sigma(f_i)} = \sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}_K(M)} L_{D'}(\sigma(f_i)).$$

La propriété de morphisme (question 14.(a)) permet d'obtenir :

$$\mathrm{tr}_{M/K}\left(L_D(f_i)\right) = L_{D'}\left(\prod_{\sigma \in \mathrm{Aut}_K(M)} \sigma(f_i)\right) = L_{D'}\left(\mathrm{N}_{M/K}(f_i)\right),$$

et comme $\mathrm{N}_{M/K}(f_i) \in K$ on a : $D'\left(\mathrm{N}_{M/K}(f_i)\right) = D\left(\mathrm{N}_{M/K}(f_i)\right)$. D'où le résultat :

$$\mathrm{tr}_{M/K}\left(L_D(f_i)\right) = L_D\left(\mathrm{N}_{M/K}(f_i)\right).$$

La seconde identité de l'énoncé s'obtient par des calculs analogues mais plus rapides :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{M/K}\left(D(g)\right) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}_K(M)} \sigma(D'(g)) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}_K(M)} D'(\sigma(g)) &= D'\left(\sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}_K(M)} \sigma(g)\right) \\ &= D'\left(\mathrm{tr}_{M/K}\left(g\right)\right),\end{aligned}$$

et on utilise encore que $\mathrm{tr}_{M/K}(g)$ appartient à K pour remplacer D' par D.
Concluons en démontrant que f est une somme de Liouville dans K. On a :

$$f = D(g) + \sum_{i \in I} c_i L_D(f_i).$$

Rappelons que les c_i sont dans L_{cst}. Comme L/K est une extension différentielle, on a : $L_{\mathrm{cst}} = K_{\mathrm{cst}}$, et en particulier les c_i sont dans K. Par conséquent, en prenant l'image par $\mathrm{tr}_{M/K}$ (qui est K-linéaire), on a :

$$\mathrm{tr}_{M/K}(f) = \mathrm{tr}_{M/K}(D(g)) + \sum_{i\in I} c_i \ \mathrm{tr}_{M/K}\left(L_D(f_i)\right).$$

Comme $f \in K$, par la question 7.(b) on a : $\mathrm{tr}_{M/K}(f) = \dim_K(M)f$, et par les identités démontrées ci-dessus on a donc :

$$f = \frac{1}{\dim_K(M)} D\left(\mathrm{tr}_{M/K}(g)\right) + \sum_{i\in I} \frac{c_i}{\dim_K(M)} L_D\left(\mathrm{N}_{M/K}(f_i)\right),$$

la division par $\dim_K(M)$ étant licite car K est de caractéristique nulle (on a donc $\dim_K(M)\cdot 1 \neq 0$). Toujours parce que K est de caractéristique nulle, on a $\mathbb{Q} \subseteq K_{\mathrm{cst}}$ et donc D est $\mathbb{Q}$-linéaire par la question 13. Ceci permet d'écrire, en posant $g' = \frac{1}{\dim_K(M)}\mathrm{tr}_{M/K}(g) \in K$, $c_i' = \frac{c_i}{\dim_K(M)} \in K_{\mathrm{cst}}$ et $f_i' = \mathrm{N}_{M/K}(f_i) \in K$:

$$f = D(g') + \sum_{i\in I} c_i' L_D\left(f_i'\right),$$

ce qui démontre que f est une somme de Liouville dans K : d'où le résultat.

Remarque. Il semble que pour utiliser l'identité $\sigma \circ D' = D' \circ \sigma$, on ait besoin de vérifier que M/K est une extension différentielle. En vérité ce n'est pas nécessaire : en effet, dans la résolution des questions 21 et 26, on voit que seule l'hypothèse $D(K) \subseteq K$ sur les extensions différentielles est utilisée. Or D' vérifie cette hypothèse, puisque sa restriction à K est D.

III.4 – Le lemme principal pour les extensions logarithmiques et exponentielles.

40. Si v est algébrique sur K, alors $L/K = K(v)/K$ est une extension finie, et par la question 39 on sait que si f est une somme de Liouville dans L alors c'en est une dans K. Le lemme principal étant déjà démontré dans ce cas, il ne reste que le cas où v est transcendant à traiter. C'est pourquoi on peut le supposer à présent, sans perte de généralité.
Par la question 1.(b), il existe alors un isomorphisme de K-algèbres $\tilde{\Phi} : K(X) \to L$ dont la restriction à K est l'identité, et tel que : $\tilde{\Phi}(X) = v$. Par la question 17, si l'on pose :

$$\forall R \in K(X), \quad D_1(R) = \tilde{\Phi}^{-1}\left(D(\tilde{\Phi}(R))\right) = \tilde{\Phi}^{-1}\left(D(R(v))\right),$$

alors on définit une dérivation sur $K(X)$ telle que : $\tilde{\Phi} \circ D_1 = D \circ \tilde{\Phi}$ (par définition même de D_1), et on a :

$$D(X) = \tilde{\Phi}^{-1}\left(D(v)\right).$$

Si v est un logarithme, on a $D(v) = \frac{D(u)}{u}$ avec $u \in K^*$. Comme $\tilde{\Phi}$ fixe les éléments de K, on a dans ce cas :

$$D_1(X) = \frac{D(u)}{u} \in K.$$

Si v est une exponentielle, on a $D(v) = D(u)v$ avec $u \in K^*$, et comme $\tilde{\Phi}^{-1}$ est K-linéaire :

$$D_1(X) = \tilde{\Phi}^{-1}\left(D(v)\right) = D(u)\tilde{\Phi}^{-1}(v) = D(u)X,$$

d'où le résultat :

$$D_1(X) = \frac{D(u)}{u} \text{ (cas logarithmique)}, \quad \text{ou :} \quad \frac{D_1(X)}{X} = D(u) \text{ (cas exponentiel)}.$$

Il reste à vérifier que $(K(X)/K, D_1)$ est une extension différentielle, c'est-à-dire :

$$D_1(K) \subseteq K, \quad \text{et :} \quad K(X)_{\mathrm{cst}} = K_{\mathrm{cst}}.$$

La première condition est immédiate par définition de D_1, étant donné que $\tilde{\Phi}_{|K} = \mathrm{Id}$ et $D(K) \subseteq K$ (en effet $(L/K, D)$ est une extension différentielle), et par la question 17 on a : $K(X)_{\mathrm{cst}} = \tilde{\Phi}^{-1}(L_{\mathrm{cst}}) = \tilde{\Phi}^{-1}(K_{\mathrm{cst}}) = K_{\mathrm{cst}}$, ce qui donne la seconde condition : d'où le résultat.

41. On sait que f est une somme de Liouville dans L. On peut donc écrire :

$$f = D(g) + \sum_{i\in I} c_i L_D(f_i) = D(g) + \sum_{i\in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i},$$

avec g et les f_i dans L, et les c_i dans $L_{\mathrm{cst}} = K_{\mathrm{cst}} \subseteq K$. Prenons l'image par $\tilde{\Phi}^{-1}$ dans cette égalité, où $\tilde{\Phi} : K(X) \to L$ est l'isomorphisme de la question précédente et de la question 1.(b), dont on se souvient en particulier qu'il laisse fixe les éléments de K (et donc f en particulier). Comme $\tilde{\Phi}^{-1} \circ D = D_1 \circ \tilde{\Phi}^{-1}$:

$$f = \tilde{\Phi}^{-1}(f) = D_1(\tilde{\Phi}^{-1}(g)) + \sum_{i\in I} c_i \frac{D_1(\tilde{\Phi}^{-1}(f_i))}{\tilde{\Phi}^{-1}(f_i)}.$$

En posant $g' = \tilde{\Phi}^{-1}(g) \in K(X)$ et $f_i' = \tilde{\Phi}^{-1}(f_i) \in K(X)$ pour tout $i \in I$ (la notation « prime » n'a rien à voir avec une dérivée ici), on a :

$$f = D_1(g') + \sum_{i\in I} c_i \frac{D_1(f_i')}{f_i'} = D_1(g') + \sum_{i\in I} c_i L_{D_1}(f_i'),$$

ce qui démontre que f est une somme de Liouville dans $K(X)$ (notons que le corps des constantes est le même pour D et D_1, en vertu de la question précédente).

42. Comme f est une somme de Liouville dans $K(X)$, par définition il existe $R \in K(X)$, $(R_i)_{i\in I} \in (K(X)^*)^I$, $(c_i)_{i\in I} \in K(X)_{\mathrm{cst}}^I = K_{\mathrm{cst}}^I$ (avec I fini, éventuellement vide), tels que :

$$f = D_1(R) + \sum_{i\in I} c_i L_{D_1}(R_i).$$

Quitte à remplacer I par $\{i \in I \mid c_i \neq 0\}$, on peut supposer que les c_i sont tous non nuls.
Si les c_i sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc au contraire qu'ils sont $\mathbb{Q}$-liés. En particulier I est non vide dans ce cas, car une famille vide est libre. Soit $J \subseteq I$ une partie non vide telle que $(c_j)_{j\in J}$ soit $\mathbb{Q}$-libre, et qui soit maximale pour cette propriété. La partie J existe puisqu'une famille d'un seul élément non nul est libre. Écrivons alors :

$$f = D_1(R) + \sum_{j\in J} c_j L_{D_1}(R_j) + \sum_{i\in I\setminus J} c_i L_{D_1}(R_i).$$

Comme $(c_j)_{j\in J} \cup (c_i)$ est $\mathbb{Q}$-liée pour tout $i \in I\setminus J$ par propriété de maximalité de J, pour tout $i \in I\setminus J$ il existe $(r_{i,j})_{j\in J} \in \mathbb{Q}^J$ tel que : $c_i = \sum\limits_{j\in J} r_{i,j} c_j$. On en déduit :

$$\begin{aligned} f &= D_1(R) + \sum_{j\in J} c_j L_{D_1}(R_j) + \sum_{i\in I\setminus J} \sum_{j\in J} r_{i,j} c_j L_{D_1}(R_i) \\ &= D_1(R) + \sum_{j\in J} c_j \left(L_{D_1}(R_j) + \sum_{i\in I\setminus J} r_{i,j} L_{D_1}(R_i) \right). \end{aligned}$$

En mettant tous les $r_{i,j}$ au même dénominateur : $r_{i,j} = \frac{n_{i,j}}{n}$, avec n et les $n_{i,j}$ entiers, on a alors :

$$f = D_1(R) + \sum_{j\in J} \frac{c_j}{n} \left(n L_{D_1}(R_j) + \sum_{i\in I\setminus J} n_{i,j} L_{D_1}(R_i) \right).$$

Comme L_{D_1} est un morphisme de groupes d'après la question 14.(a), on obtient :

$$f = D_1(R) + \sum_{j \in J} \frac{c_j}{n} L_{D_1} \left(R_j^n \prod_{i \in I \setminus J} R_i^{n_{i,j}} \right).$$

Posons alors : $\forall j \in J,\ c'_j = \frac{c_j}{n} \in K_{\text{cst}}$, et : $R'_j = R_j^n \prod\limits_{i \in I \setminus J} R_i^{n_{i,j}} \in K(X)^*$. On a démontré :

$$f = D_1(R) + \sum_{j \in J} c'_j L_{D_1} \left(R'_j \right),$$

avec $(c'_j)_{j \in J}$ libre sur $\mathbb{Q}$ par construction de J (diviser tous les éléments par un entier n ne change pas le caractère libre) : d'où le résultat.

43. Comme f est une somme de Liouville dans $K(X)$, on peut écrire, quitte à choisir un dénominateur commun à toutes les fractions rationnelles en présence :

$$f = D_1 \left(\frac{P_0}{Q} \right) + \sum_{i \in I} c_i L_{D_1} \left(\frac{P_i}{Q} \right),$$

où I est une partie finie de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, tandis que P_0, Q et les P_i sont des polynômes (non nuls dans le cas de Q et P_i), et les c_i des éléments de $K(X)_{\text{cst}} = K_{\text{cst}}$. La question précédente démontre qu'on peut choisir les c_i de sorte qu'ils soient linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.
Si l'on fait la division euclidienne de P_0 par Q, on a même :

$$f = D_1(P) + D_1 \left(\frac{R}{Q} \right) + \sum_{i \in I} c_i L_{D_1} \left(\frac{P_i}{Q} \right),$$

avec P et Q dans $K[X]$ tels que : $\deg(R) < \deg(Q)$.
Soit alors M le corps de décomposition de $Q \cdot \prod\limits_{i \in I} P_i$ sur K. Notons $\{\lambda_j \mid j \in J\}$ l'ensemble des racines de ce polynôme (avec J une partie finie de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$). On peut écrire :

$$\forall i \in I, \quad \frac{P_i}{Q} = a_i \prod_{j \in J} (X - \lambda_j)^{m_{i,j}},$$

où les m_j sont des entiers relatifs et les a_i des éléments de K (ils dépendent des coefficients dominants de P_i et Q). Par la question 14.(b), on a :

$$\sum_{i \in I} c_i L_{D_1} \left(\frac{P_i}{Q} \right) = \sum_{i \in I} c_i L_{D_2} \left(\frac{P_i}{Q} \right) = \sum_{i \in I} c_i L_{D_2}(a_i) + \sum_{(i,j) \in I \times J} c_i m_{i,j} \frac{D_2(X) - D_2(\lambda_j)}{X - \lambda_j}.$$

On décompose ensuite en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{R}{Q} \in M(X)$:

$$\frac{R}{Q} = \sum_{(j,s) \in J \times S} \frac{n_{j,s}}{(X - \lambda_j)^s},$$

où les $n_{j,s}$ sont dans M et S une partie finie de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si $R = 0$, on prend $S = \varnothing$. Alors :

$$f = D_1(P) + \sum_{(j,s) \in J \times S} D_2 \left(\frac{n_{j,s}}{(X - \lambda_j)^s} \right) + \sum_{i \in I} c_i L_{D_2}(a_i) + \sum_{(i,j) \in I \times J} c_i m_{i,j} \frac{D_2(X) - D_2(\lambda_j)}{X - \lambda_j},$$

d'où le résultat, puisque $D_{2|K(X)} = D_1$.

44. Commençons par le cas où D_1 est logarithmique. Pour démontrer que $\frac{D_1(X)-D_2(\lambda_j)}{X-\lambda_j}$ est non nulle, raisonnons par l'absurde : si elle est nulle, alors on a : $D_2(\lambda_j) = D_1(X) = \alpha$ avec $\alpha \in K^*$. On a alors, du fait que $\mathrm{tr}_{M/K}(\alpha) = \dim_K(M)\alpha$ (question 7.(a)) et $\mathrm{tr}_{M/K} \circ D_{2|M} = D_{2|M} \circ \mathrm{tr}_{M/K}$ (imiter le raisonnement de la question 39, ce qui est licite puisque M est un corps de décomposition) :

$$\alpha = \frac{1}{\dim_K(M)} D_2\left(\mathrm{tr}_{M/K}(\lambda_j)\right) = D_1\left(\frac{\mathrm{tr}_{M/K}(\lambda_j)}{\dim_K(M)}\right). \qquad (D_{2|K} = D_{1|K})$$

Si l'on pose : $\beta = \frac{\mathrm{tr}_{M/K}(\lambda_j)}{\dim_K(M)} \in K$ on a donc, comme $\alpha = D_1(X)$:

$$D_1(X-\beta) = 0,$$

c'est-à-dire : $X - \beta \in K(X)_{\mathrm{cst}} = K_{\mathrm{cst}}$ (car $K(X)/K$ est une extension différentielle d'après la question 40). Comme $\beta \in K$ et $K_{\mathrm{cst}} \subseteq K$, cela démontre : $X \in K$, ce qui est absurde.
Ce raisonnement par l'absurde démontre que $\frac{D_1(X)-D_2(\lambda_j)}{X-\lambda_j}$ est non nulle. De plus le numérateur est de degré nul puisque $D_1(X) \in K$, donc la fraction est nécessairement irréductible. D'où le résultat dans le cas où D_1 est logarithmique.
Supposons à présent que D_1 est exponentielle. Si $\lambda_j = 0$, alors $\frac{D_1(X)-D_2(\lambda_j)}{X-\lambda_j} = \frac{D_1(X)}{X} = \alpha \in K$, comme annoncé. Supposons que $\lambda_j \neq 0$. Démontrons que dans ce cas, cette fraction est non nulle et sous forme irréductible. On a :

$$\frac{D_1(X)-D_2(\lambda_j)}{X-\lambda_j} = \frac{\alpha X - D_2(\lambda_j)}{X-\lambda_j}.$$

Le numérateur est non nul puisque $\alpha \neq 0$. De plus, cette fraction est **réductible** si et seulement si le numérateur et le dénominateur ont un zéro en commun, or le dénominateur admet λ_j comme unique racine. On en déduit que cette fraction est réductible si et seulement si :

$$\alpha\lambda_j = D_2(\lambda_j),$$

ce qui équivaut à : $\alpha = L_{D_2}(\lambda_j)$. Démontrons que cette égalité est impossible en raisonnant par l'absurde. Si $\alpha = L_{D_2}(\lambda_j)$ alors, par la question 7.(a) et par la relation $\mathrm{tr}_{M/K} \circ L_{D_{2|M}} = L_{D_{2|M}} \circ \mathrm{N}_{M/K}$ (imiter le raisonnement de la question 39) :

$$\dim_K(M)\alpha = L_{D_2}(\mathrm{N}_{M/K}(\lambda_j)) = L_{D_1}(\mathrm{N}_{M/K}(\lambda_j)). \qquad (D_{2|K} = D_{1|K})$$

Posons $n = \dim_K(M)$ et $u = \mathrm{N}_{M/K}(\lambda_j) \in K^*$ pour abréger. Comme $\alpha = \frac{D_1(X)}{X} = L_{D_1}(X)$, cette égalité peut se réécrire :

$$L_{D_1}(u) = nL_{D_1}(X) \overset{(q.\,14.(a))}{=} L_{D_1}(X^n).$$

Comme le noyau de $L_{D_1} : K(X)^* \to K(X)$ est $K(X)^*_{\mathrm{cst}} = K^*_{\mathrm{cst}}$ par la question 14.(a), il s'ensuit :

$$\exists c \in K^*_{\mathrm{cst}}, \quad X^n = cu,$$

donc : $X^n \in K$. C'est absurde car $n \neq 0$. Par l'absurde, le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{D_1(X)-D_2(\lambda_j)}{X-\lambda_j}$ n'ont pas de racine commune, donc d'après les équivalences ci-dessus elle est irréductible : ce qu'il fallait démontrer.

45. Supposons : $n_{j,s} \neq 0$. On a :

$$D_2\left(\frac{n_{j,s}}{(X-\lambda_j)^s}\right) \overset{(q.\,12)}{=} \frac{D_2(n_{j,s})}{(X-\lambda_j)^s} - sn_{j,s}\frac{D_2(X-\lambda_j)}{(X-\lambda_j)^{s+1}} = \frac{D_2(n_{j,s})}{(X-\lambda_j)^s} - sn_{j,s}\frac{D_1(X)-D_2(\lambda_j)}{(X-\lambda_j)^{s+1}}.$$

Pour connaître l'ordre du pôle λ_j dans ce membre de droite (car c'est ce qu'on nous demande, même si ce n'est pas formulé ainsi dans l'énoncé), nous devons déterminer si le numérateur de la fraction $\frac{D_1(X)-D_2(\lambda_j)}{(X-\lambda_j)^{s+1}}$ est divisible par $X - \lambda_j$. Là encore, nous faisons une étude en deux temps.

Si D_1 est logarithmique, en raisonnant comme dans la question précédente on démontre que $D_1(X) - D_2(\lambda_j)$ est dans K^*, de sorte que la fraction $\frac{D_1(X)-D_2(\lambda_j)}{(X-\lambda_j)^{s+1}}$ soit irréductible. L'ordre du pôle de $\frac{D_1(X)-D_2(\lambda_j)}{(X-\lambda_j)^{s+1}}$ en λ_j vaut donc $s+1$.
Si D_1 est exponentielle, avec $D_1(X) = \alpha X$ où $\alpha \in K^*$, et si $\lambda_j \neq 0$, on peut écrire :

$$\frac{D_1(X) - D_2(\lambda_j)}{(X-\lambda_j)^{s+1}} = \frac{\alpha X - D_2(\lambda_j)}{(X-\lambda_j)^{s+1}} = \frac{\alpha}{(X-\lambda_j)^s} + \frac{\alpha\lambda_j - D_2(\lambda_j)}{(X-\lambda_j)^{s+1}},$$

et on a démontré dans la question précédente que $\alpha\lambda_j - D_2(\lambda_j) \neq 0$ si $\lambda_j \neq 0$. Par conséquent l'ordre du pôle de $\frac{D_1(X)-D_2(\lambda_j)}{(X-\lambda_j)^{s+1}}$ en λ_j vaut $s+1$ dans ce cas.
Dans tous les cas, sauf D_1 exponentielle et $\lambda_j = 0$, on en déduit que l'ordre du pôle de $\frac{D_1(X)-D_2(\lambda_j)}{(X-\lambda_j)^{s+1}}$ en λ_j vaut $s+1$, et donc c'est aussi le cas pour $D_2\left(\frac{n_{j,s}}{(X-\lambda_j)^s}\right)$ (puisque ces deux fractions ne diffèrent que de $\frac{\alpha}{(X-\lambda_j)^s}$: l'exposant s ne compense pas l'exposant $s+1$). Comme $s+1 \geqslant 2$, on a le résultat voulu.
Si D_1 est exponentielle et $\lambda_j = 0$, alors :

$$D_2\left(\frac{n_{j,s}}{X^s}\right) = \frac{D_2(n_{j,s})}{X^s} - sn_{j,s}\frac{D_1(X)}{X^{s+1}} = \frac{D_2(n_{j,s}) - sn_{j,s}\alpha}{X^s},$$

et en raisonnant avec la trace comme dans la question précédente, on démontre que l'on a : $D_2(n_{j,s}) - sn_{j,s}\alpha \neq 0$ (sinon on aurait $X^{\dim_K(M)s} \in K$, ce qui est absurde). On en déduit que le pôle de $D_2\left(\frac{n_{j,s}}{X^s}\right)$ en 0 vaut s, ce qui conclut.

46. Rappelons que l'on a : $P \in K[X]$. On peut donc écrire : $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$, avec les a_i dans K. Ensuite, suivant un calcul déjà effectué à plusieurs reprises (question 29.(a) par exemple) :

$$D_1(P) = P^{D_1} + D_1(X)P'.$$

Peu importe que $D_1(X)$ soit égal à $\alpha \in K^*$ (cas logarithmique) ou à αX (cas exponentiel), on obtient à chaque fois un polynôme à coefficients dans K : ce qu'il fallait démontrer.
Or f est dans K, donc aussi dans $K[X]$. On a donc, par la question 43 :

$$\sum_{(j,s)\in J\times S} D_2\left(\frac{n_{j,s}}{(X-\lambda_j)^s}\right) + \sum_{(i,j)\in I\times J} c_i m_{i,j}\frac{D_1(X) - D_2(\lambda_j)}{X-\lambda_j} \in K[X].$$

Par unicité de la décomposition en éléments simples, il ne doit pas y avoir de pôle. Écartons d'abord le cas exceptionnel où D_1 est exponentielle et $\lambda_j = 0$, et regardons les pôles doubles (ou d'ordre supérieur). Si l'on regarde les termes dépendant de λ_j :

$$\sum_{s\in S} D_2\left(\frac{n_{j,s}}{(X-\lambda_j)^s}\right) + \left(\sum_{i\in I} c_i m_{i,j}\right)\frac{D_1(X) - D_2(\lambda_j)}{X-\lambda_j},$$

le numérateur de l'élément simple $\frac{1}{(X-\lambda_j)^k}$ doit être nul pour tout $k \geqslant 1$, et en particulier pour tout $k \geqslant 2$. D'après les deux questions précédentes, seule la première somme contribue aux exposants supérieurs ou égaux à 2 et en regardant plus précisément le facteur $\frac{1}{(X-\lambda_j)^{s+1}}$ pour $s \in S$ on a :

$$\forall s \in S, \quad sn_{j,s} = 0.$$

Comme $s \neq 0$ pour $s \in S$, on a : $\forall s \in S$, $n_{j,s} = 0$. Il reste donc à regarder :

$$\left(\sum_{i\in I} c_i m_{i,j}\right)\frac{D_1(X) - D_1(\lambda_j)}{X-\lambda_j}.$$

Si D_1 est logarithmique, alors l'égalité :

$$\frac{D_1(X) - D_2(\lambda_j)}{X - \lambda_j} = \frac{\alpha - D_2(\lambda_j)}{X - \lambda_j},$$

l'absence nécessaire de pôle, et le fait que $\alpha - D_2(\lambda_j) \neq 0$ par la question 44, impliquent :

$$\sum_{i \in I} c_i m_{i,j} = 0.$$

Comme $(c_i)_{i \in I}$ est $\mathbb{Q}$-libre, on a : $\forall i \in I$, $m_{i,j} = 0$. Cela vaut pour tout $j \in J$: d'où le résultat si D_1 est logarithmique.

Si D_1 est exponentielle, alors l'égalité :

$$\frac{D_1(X) - D_2(\lambda_j)}{X - \lambda_j} = \alpha + \frac{\alpha\lambda_j - D_2(\lambda_j)}{X - \lambda_j},$$

l'absence nécessaire de pôle, et le fait que $\alpha\lambda_j - D_2(\lambda_j) \neq 0$ si $\lambda_j \neq 0$, impliquent sous cette hypothèse :

$$\sum_{i \in I} c_i m_{i,j} = 0.$$

Comme ci-dessus, on conclut que $m_{i,j} = 0$ pour tout $i \in I$ et tout $j \in J$ tel que $\lambda_j \neq 0$.

Si $\lambda_j = 0$, on ne peut rien conclure puisque $\frac{D_1(X) - D_2(\lambda_j)}{X - \lambda_j}$ appartient à K dans ce cas particulier : il n'y a pas de pôle.

En résumé, nous avons démontré que $n_{s,j} = 0$ pour tout $(j, s) \in J \times S$, puis que $m_{i,j} = 0$ pour tout $(i, j) \in I \times J$ sauf éventuellement si D_1 est exponentielle et $\lambda_j = 0$.

47. L'énoncé comportait une imprécision : c'est le coefficient de X que l'on veut dans K_{cst}. Si P est constant, il est faux que le coefficient dominant (de degré 0) est toujours dans K_{cst}.

Supposons D_1 logarithmique. Posons : $P = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$, avec les b_i dans K. On a :

$$D_1(P) = \sum_{i=0}^{n} D_1(b_i) X^i + D_1(X) \sum_{i=0}^{n} b_i i X^{i-1} = D_1(b_n) X^n + \sum_{i=0}^{n-1} \left(D_1(b_i) + D_1(X) b_{i+1}(i+1) \right) X^i.$$

Supposons : $D_1(P) \in K$. Le coefficient en facteur de X^i, pour $i \geqslant 1$, est donc nul dans le membre de droite. On en déduit que soit $n = 0$ (autrement dit P est constant et le résultat attendu est vrai), soit $n \geqslant 1$ et on a :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \; D_1(b_i) + D_1(X) b_{i+1}(i+1) = 0, \quad \text{et} \; : \quad D_1(b_n) = 0.$$

Démontrons alors par récurrence descendante sur i que l'on a $D_1(b_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. C'est déjà vérifié pour $i = n$. Si $i \in [\![2, n]\!]$ est tel que $D_1(b_i) = 0$, alors d'après les relations ci-dessus on a, par K_{cst}-linéarité de D_1 :

$$D_1(b_{i-1} + i b_i X) = 0,$$

donc : $b_{i-1} + i b_i X \in K(X)_{\text{cst}} = K_{\text{cst}}$. Comme $K_{\text{cst}} \subseteq K$, ce n'est possible que si $b_i = 0$ et donc : $b_{i-1} \in K_{\text{cst}}$. C'est-à-dire : $D_1(b_{i-1}) = 0$, d'où le résultat au rang $i - 1$.

Par principe de récurrence, on a $D_1(b_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et donc la première égalité ci-dessus implique $D_1(X) b_{i+1}(i+1) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, et comme $X \notin K(X)_{\text{cst}}$ (voir plus haut), on a $b_{i+1} = 0$ pour tout $i \geqslant 1$. On a donc :

$$P = b_0 + b_1 X,$$

avec $b_1 \in K_{\text{cst}}$: d'où le résultat.

48. Supposons D_1 exponentielle. Le début du raisonnement suit celui de la question précédente. Posons : $P = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i X^i$, avec les b_i dans K. On a :

$$D_1(P) = \sum_{i=0}^{n} D_1(b_i)X^i + D_1(X)\sum_{i=0}^{n} b_i i X^{i-1} = \sum_{i=0}^{n}\left(D_1(b_i) + \frac{D_1(X)}{X}b_i i\right)X^i.$$

On rappelle que $\frac{D_1(X)}{X}$ est bien dans K car D_1 est exponentielle. Le fait que $D_1(P)$ soit dans K implique :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad D_1(b_i) + \frac{D_1(X)}{X}b_i i = 0.$$

Cette égalité donne après multiplication par X^i :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad D_1(b_i)X^i + D_1(X)b_i i X^{i-1} = 0.$$

Or, pour $i \in [\![1,n]\!]$, on a : $D_1(b_i)X^i + D_1(X)b_i i X^{i-1} = D_1(b_i X^i)$, donc l'égalité ci-dessus donne :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad b_i X^i \in K(X)_{\text{cst}} = K_{\text{cst}} \subseteq K.$$

Comme X^i n'appartient pas à K pour $i \geqslant 1$, ceci impose : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $b_i = 0$, donc $P = b_0$ est un polynôme constant.
Si l'on suppose à la place que $D_1(P)$ est de degré 1, reprendre les calculs ci-dessus mène à : $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $b_i = 0$, et donc P est un polynôme de degré au plus 1.

49. Les questions 43 et 46 démontrent que l'on a, respectivement dans les cas logarithmique et exponentiel :

$$f = D_1(P) + \sum_{i\in I} c_i L_{D_1}(a_i), \qquad \text{ou :} \qquad f = D_1(P) + \sum_{i\in I} c_i L_{D_1}(a_i) + \sum_{i\in I} c_i m_{i,j_0}\frac{D_1(X)}{X},$$

où j_0 est l'éventuel indice tel que $\lambda_{j_0} = 0$ (s'il n'existe pas de tel indice, alors la dernière somme n'apparaît pas).
Dans un cas comme dans l'autre, on remarque qu'en isolant $D_1(P)$, on obtient : $D_1(P) \in K$ (se souvenir que $\frac{D_1(X)}{X} \in K$ si D_1 est exponentielle). Par les deux questions précédentes :

— si D_1 est logarithmique, on peut écrire $P = aX + b$, avec $a \in K_{\text{cst}}$, et comme $D_1(X) = \frac{D(u)}{u} = L_D(u)$ avec $u \in K^*$ on a par K_{cst}-linéarité de D_1 :

$$f = D_1(b) + aL_D(u) + \sum_{i\in I} c_i L_{D_1}(a_i) = D(b) + aL_D(u) + \sum_{i\in I} c_i L_D(a_i), \qquad (D_{1|K} = D_{|K})$$

ce qui démontre donc que f est une somme de Liouville dans K ;

— si D_1 est exponentielle, alors $P \in K$; souvenons-nous que l'on a : $\frac{D_1(X)}{X} = D(u)$, avec $u \in K$; par conséquent, par K_{cst}-linéarité de D_1 :

$$f = D_1\left(P + \sum_{i\in I} c_i m_{i,j_0} u\right) + \sum_{i\in I} c_i L_{D_1}(a_i) = D\left(P + \sum_{i\in I} c_i m_{i,j_0} u\right) + \sum_{i\in I} c_i L_D(a_i)$$

ce qui démontre également que f est une somme de Liouville dans K.

D'où le résultat dans tous les cas.

III.5 – Primitives élémentaires de fe^g et de $\frac{\ln(T)}{T-\lambda}$.

50. Supposons que Xf est une somme de Liouville dans $K(X)$. En reprenant le raisonnement des questions 41 à 46, mais avec Xf au lieu de f (qui appartient à $K[X]$, ce qui assure que le raisonnement de la question 46 en particulier reste valide), on a une expression de la forme :

$$Xf = D(P) + \sum_{i \in I} c_i L_D(a_i) + c\frac{D(X)}{X},$$

où P est dans $K[X]$, tandis que les a_i, c_i et c sont dans K. Or D est une dérivation exponentielle donc : $\frac{D(X)}{X} \in K$. Cette égalité implique donc que $D(P)$ est un polynôme de degré au plus 1. Par la question 48, le polynôme P est lui-même de degré au plus 1. Écrivons donc : $P = aX + b$, avec $(a, b) \in K^2$, et posons $d = \sum_{i \in I} c_i L_D(a_i) \in K$ pour abréger. On a :

$$Xf = D(a)X + aD(X) + D(b) + d + c\frac{D(X)}{X} = \underbrace{\left(D(a) + a\frac{D(X)}{X}\right)}_{\in K} X + \underbrace{\left(D(b) + d + c\frac{D(X)}{X}\right)}_{\in K}.$$

En comparant le coefficient de X dans chaque membre de l'égalité, on a : $f = D(a) + a\frac{D(X)}{X}$, c'est-à-dire :

$$Xf = D(a)X + aD(X) = D(aX),$$

ce qui démontre l'implication directe.

Réciproquement, s'il existe $a \in K$ tel que : $Xf = D(Xa)$, alors on reconnaît immédiatement une somme de Liouville dans $K(X)$ et cela donne le résultat voulu.

51. Posons $K = \mathbb{C}(T)$. Supposons que $fe^g \in K(e^g)$ admet une primitive élémentaire pour ∂. Alors fe^g est une somme de Liouville dans $\mathbb{C}(T)(e^g)$ d'après le théorème principal. Comme e^g est transcendant sur $\mathbb{C}(T)$ par la question 30.(a), le même raisonnement qu'aux questions 40 et 41 permet de démontrer que Xf est une somme de Liouville dans $K(X)$ muni de la dérivation D_1 construite à la question 40 (on utilise le fait que l'isomorphisme $\tilde{\Phi} : K(X) \to K(e^g)$ de la question 40 envoie X sur e^g et fixe les éléments de K). C'est une dérivation exponentielle par la question 40, donc par la question précédente il existe $a \in K$ tel que : $Xf = D_1(Xa)$. Posons $b = \tilde{\Phi}(a) \in K$. Alors :

$$fe^g = \tilde{\Phi}(Xf) = \tilde{\Phi} \circ D_1(Xa) = \partial \circ \tilde{\Phi}(Xa) = \partial(e^g b) = e^g b' + g' e^g b.$$

En simplifiant par $e^g \neq 0$, on obtient : $f = b' + bg'$ avec $b \in K = \mathbb{C}(T)$, comme attendu.

Réciproquement, s'il existe $b \in \mathbb{C}(T)$ tel que : $f = b' + bg'$, alors :

$$fe^g = b'e^g + bg'e^g = (be^g)',$$

donc fe^g admet pour primitive $be^g \in \mathbb{C}(T)(e^g)$, qui est élémentaire (elle appartient au même corps différentiel que fe^g).

52. Raisonnons par l'absurde et supposons que e^{T^n} admet une primitive élémentaire. Par la question précédente (avec $f = 1$ et $g = T^n$), il existe $b \in \mathbb{C}(T)$ tel que :

$$1 = b' + nT^{n-1}b.$$

On a clairement $b \neq 0$, et une décomposition en éléments simples de b démontre que b doit être un polynôme (non nul). En effet, dans le cas contraire, la présence de b' assure l'existence d'un pôle d'ordre au moins 2 (qui ne peut pas être compensé par le facteur $nT^{n-1}b$) : voir la remarque en gras dans la résolution de la question 30.(a). Comme :

$$\deg(T^{n-1}b) = n - 1 + \deg(b) \geqslant 1 + \deg(b) > \deg(b'),$$

on a : $\deg(b' + nT^{n-1}b) = \deg(T^{n-1}b) \geqslant 1$. C'est absurde puisque $b' + nT^{n-1}b$ est un polynôme constant égal à 1 : contradiction.
Par l'absurde, e^{T^n} n'admet pas de primitive élémentaire. Ce raisonnement s'étendrait à e^P pour tout polynôme P de degré supérieur ou égal à 2.
Passons à $\frac{e^T}{T}$. On raisonne encore par l'absurde. Si $\frac{e^T}{T}$ admet une primitive élémentaire, par la question précédente il existe $b \in \mathbb{C}(T)$ tel que :

$$\frac{1}{T} = b' + b.$$

C'est impossible puisqu'une décomposition en éléments simples de b (qui est clairement non nul) démontre que le membre de droite n'admet pas de pôle simple, alors que le membre de gauche si : il admet un unique pôle simple en 0. Contradiction.
Par l'absurde, $\frac{e^T}{T}$ n'admet pas de primitive élémentaire non plus.

53. Posons : $K = \mathbb{C}(T)$. Supposons que $\frac{\ln(T)}{T-\lambda} \in K(\ln(T))$ admet une primitive élémentaire. Par le théorème principal, $\frac{\ln(T)}{T-\lambda}$ est une somme de Liouville dans $K(\ln(T))$. Comme $\ln(T)$ est transcendant sur K par la question 31 (en effet $\ln(T)$ n'appartient pas à K par la question 30.(a) ; sinon, il existerait bien $S \in \mathbb{C}(T)$ tel que : $S' = \frac{T'}{T} = \frac{1}{T}$, à savoir $S = \ln(T)$, ce qui est absurde), on dispose par la question 40 d'une dérivation logarithmique $D : K(X) \to K(X)$ et d'un isomorphisme de $K(\ln(T))$ dans $K(X)$ faisant de $\frac{X}{T-\lambda}$ une somme de Liouville dans $(K(X), D)$. Plus précisément, en imitant le raisonnement des questions 41 à 46, on a l'existence de $P \in K[X]$, $(c_i)_{i\in I} \in K_{\text{cst}}^I$ et $(a_i)_{i\in I} \in (K^*)^I$ tels que :
$$\frac{X}{T-\lambda} = D(P) + \sum_{i\in I} c_i L_D(a_i).$$
De plus, en isolant $D(P)$, on observe que $D(P)$ est un polynôme à coefficients dans K de degré au plus 1 : en imitant le raisonnement de la question 47, on en déduit qu'il existe $(a, b, c) \in K^2 \times K_{\text{cst}}$ tel que : $P = a + bX + cX^2$. Par K_{cst}-linéarité de D, on en déduit :
$$\frac{X}{T-\lambda} = D(a) + D(b)X + bD(X) + 2cXD(X) + \sum_{i\in I} c_i L_D(a_i).$$
Comme $D(X) = \partial(\ln(T)) = \frac{1}{T} \in K$ par construction, l'identification des facteurs de X dans cette égalité donne :
$$\frac{1}{T-\lambda} = D(b) + \frac{2c}{T} = b' + \frac{2c}{T}.$$
Supposons alors $\lambda \neq 0$. L'unicité de la décomposition en éléments simples impose $c = 0$ (rappelons le fait mis en évidence à la question 30.(a) : la dérivée d'une fraction rationnelle non nulle n'admet pas de pôle simple, donc la fraction rationnelle b' ne compense pas le pôle issu de $\frac{1}{T}$). Mais l'égalité $\frac{1}{T-\lambda} = b'$ est alors impossible pour la raison que l'on vient d'évoquer : comme $b \in K = \mathbb{C}(T)$, la fraction rationnelle b' ne peut pas admettre de pôle simple. Par l'absurde, on a démontré : $\lambda = 0$. Cela donne une condition nécessaire pour que $\frac{\ln(T)}{T-\lambda}$ admette une primitive élémentaire.
Réciproquement, si $\lambda = 0$, alors : $\left(\frac{1}{2}(\ln(T))^2\right)' = \frac{\ln(T)}{T}$, et $\frac{1}{2}(\ln(T))^2$ appartient au même corps différentiel que $\frac{\ln(T)}{T} \in K(\ln(T))$: on en déduit que $\frac{\ln(T)}{T}$ admet une primitive élémentaire.
En conclusion, $\frac{\ln(T)}{T-\lambda} \in K(\ln(T))$ admet une primitive élémentaire si et seulement si : $\lambda = 0$.

3.3 Proposition de corrigé du problème d'analyse et probabilités

(dans les commentaires suivants, nous utilisons le neutre : candidat=candidat.e)

Le but du sujet est d'étudier les propriétés d'un semi-groupe d'opérateurs (le semi-groupe de Riemann-Liouville) dans lequel se plonge l'opérateur d'intégration (opérateur de Volterra). Après un passage par le cadre des fonctions continues sur $[0,1]$, le reste du sujet se place dans le cadre $L^2([0,1])$ pour s'intéresser notamment à des propriétés d'idéaux d'opérateurs telles que la compacité, le caractère Hilbert-Schmidt, et enfin la nucléarité dans la toute dernière question.

Le sujet est prétexte à balayer divers champs du programme d'analyse de l'agrégation. Cette variété a permis à la plupart des candidats de s'exprimer dans les copies, en abordant souvent une proportion significative du sujet.

Toujours en ce qui concerne les commentaires généraux, on note une grande disparité dans la qualité de la rédaction (et de l'orthographe !) et de la présentation des copies.

Enfin, nous encourageons les candidats à lire attentivement l'énoncé ; cela évite des confusions dans la nature des objets (notamment entre V et J dans ce sujet).

En ce qui concerne plus précisément le sujet, la **première partie** est consacrée à des résultats préliminaires variés et indépendants :

— Calcul d'intégrale élémentaire : le calcul par double IPP a souvent été privilégié, mais le cas particulier $n = m$ a été fait complètement à part, lorsqu'il n'était pas oublié.

— Équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants. Sur le (a), le plus souvent bien traité, on constate quand même des erreurs étonnantes. L'équation différentielle en elle-même a été en général bien résolue, mais la gestion des conditions au bord n'a pas été pas toujours bien traitée avec à la fois des problèmes de rédaction et des problèmes de logique pour répondre effectivement à la question posée. En particulier, certains candidats n'ont pas vu que l'ensemble des solutions dépendait de λ.

— Théorème fondamental de l'analyse : pour le (a), trop de copies ont donné une réponse fausse (en indiquant $f - f(0)$) mais très majoritairement les candidats ont répondu correctement. Par contre la preuve de ce résultat classique pose des difficultés à une majorité de candidats : elle était le plus souvent ignorée, ou fausse, ou simplement mal rédigée.

— Adjoint d'un opérateur sur un Hilbert : en général cette question a été plutôt bien traitée.

— Norme d'un opérateur diagonal sur un espace de Hilbert : de façon très surprenante, cette question a mis en grande difficulté une large majorité de candidats. Très souvent, expliciter la norme d'une somme de vecteurs orthogonaux n'était pas comprise (Pythagore ignoré) avec des confusions entre somme ℓ^1 et somme ℓ^2.

La **seconde partie** commence avec l'introduction des deux fonctions spéciales classiques de l'analyse : la fonction Γ et la fonction Bêta, puis un calcul d'équivalent du coefficient de Fourier d'une fonction puissance, via des techniques d'analyse complexe.

— La question 1. (surtout a/b/c) a été en général plutôt bien traitée du point de vue calcul. Toutefois, en ce qui concerne la rédaction, on attendait au b. d'être prudent avec les bornes dans l'I.P.P. généralisée. Au c., une rédaction propre de la récurrence était attendue.

  Nous en profitons pour rappeler aux candidats que le jury est particulièrement attentif au soin et à la précision de la rédaction en début de sujet.

  Quant à la question d. si l'énoncé du théorème de continuité sous le signe $\int$ était en général bien connu, dans ce cas précis, la domination a posé des difficultés.

— A la question 2. les candidats n'ont pas toujours vu en 2.a. qu'il fallait s'occuper (même rapidement) de la borne "1". Pour le 2.b., le fait que l'image de φ soit bien incluse dans $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ a souvent été oublié. Le recours au théorème d'inversion local, souvent invoqué, était inutile et concrètement insuffisant tel quel. Au (ii), le changement de variable a été trop peu souvent explicité et trop peu de candidats ont véritablement détaillé l'étape de ce changement de variable multidimensionnel.

— Question 3 : les a. et b. ont en général été correctement traités, en particulier le recours à l'I.P.P. a été vu. Cependant beaucoup trop de candidats ne simplifient pas $\exp(2in\pi)$.

La question 3.c. a été abordée par une bonne proportion de candidats mais leur a posé de grandes difficultés. Sans être exhaustif sur celles-ci, notons tout de même que le log complexe est manipulé sans aucune précaution (en particulier attention au log d'un produit !), les hypothèses de la formule de Cauchy, notamment la nature du domaine, ne sont pas mentionnées (encore moins vérifiées). On a constaté de nombreux "passages en force" dans cette question. Concrètement cette question est très rarement correctement traitée.

Enfin au 3.e, la gestion des équivalents et des comparaisons a été en général fragile.

La **troisième partie** s'intéresse à l'opérateur J d'intégration sur $C([0,1])$: on montre que le spectre ponctuel est vide, et qu'il est compact en utilisant le théorème d'Ascoli. On explicite par ailleurs les itérées successives de J (préparant ainsi à l'introduction du semi-groupe dans la partie V).

— La toute première question n'a pas posé de difficultés particulières. Mais pour l'injectivité de J, certains candidats ont affirmé que, si l'intégrale d'une fonction continue est nulle alors cette fonction est nulle, considérant -ou pas- que la fonction était positive (ce qui n'était pas le cas du tout, puisqu'à valeurs complexes a priori).

— Pour la troisième question, beaucoup de candidats ont oublié que f devait s'annuler en 0 et ont donc affirmé que $\sigma_p(J) = \mathbf{C}\backslash\{0\}$.

— Dans 4., les récurrences en a. et b. ont souvent été mal rédigées et comportaient des erreurs de logique. Quant à c., peu de candidats ont pensé à utiliser une formule de Taylor et beaucoup se sont lancés dans une récurrence, qu'ils ont eu en fait du mal à gérer.

On note aussi beaucoup de confusions entre J et $J(f)$ dans cette question et la suivante.

— Si la question a.a été souvent bien traitée, très peu de candidats ont pensé à invoquer le théorème d'Ascoli qui donnait immédiatement le résultat.

La **quatrième partie** s'intéresse toujours à l'opérateur d'intégration (noté V ici) mais cette fois sur l'espace de Hilbert $L^2(0,1)$: on calcule notamment son adjoint, les valeurs propres (et une base hilbertienne associée) de V^*V, et la norme de V.

— La toute première question a été abordée par une large proportion de candidats avec plus ou moins de réussite, avec parfois des confusions avec l'opérateur J. Le b. a été souvent "maltraité", les candidats se contentant de calculs formels.

— La seconde question nécessitait de bien comprendre la nature des objets mis en jeu et cela a en fait une question dont la rédaction a été délicate.

— Si la question 3. a été abordée par un nombre significatif de candidats, trop de candidats ont "forcé" les calculs à déboucher sur la formule annoncée.

Dans la **cinquième partie**, on aborde (enfin) l'aspect semi-groupe, en utilisant les résultats des parties précédentes. On introduit le semi-groupe de Riemann-Liouville $\left(V_s\right)_{s>0}$. On établit alors que c'est un semi-groupe fortement continu et que V_s est compact pour tout $s > 0$.

Le début de cette partie a été abordé par une petite proportion de candidats avec une réussite inégale.

Enfin la **sixième partie** établit des généralités sur les opérateurs de Hilbert-Schmidt, puis montre que les opérateurs V_s ont cette propriété exactement quand $s > \dfrac{1}{2}\cdot$ Le problème se conclut en demandant de montrer qu'ils sont nucléaires exactement quand $s > 1$.

Cette dernière partie a été significativement abordée par extrêmement peu de candidats.

Proposition de corrigé

Partie I : Préliminaires

1) Notons $I = \int_0^1 \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x$.

Solution 1

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.
Ainsi

$$\cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos((n+m+1)\pi x) + \cos((n-m)\pi x)\right).$$

De plus, pour $k \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$\int_0^1 \cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k\pi}\left[\sin(k\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{k\pi}(\sin(k\pi) - \sin(0)) = 0$$

et si $k = 0$, on a

$$\int_0^1 \cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1.$$

Comme $m + n + 1 \in \mathbb{N}^*$, on en déduit donc que

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}.$$

Solution 2

On peut aussi procéder par double intégration par parties. Une première IPP (les fonctions impliquées sont $\mathscr{C}^1$) permet d'obtenir (sans que l'on détaille ici le calcul)

$$I = \left(\frac{2m+1}{2n+1}\right) \int_0^1 \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x\,.$$

Ainsi si $m = n$, on a

$$I = \int_0^1 1 - \cos^2\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x = 1 - I$$

donc $I = \frac{1}{2}$ dans ce cas.

Lorsque $m \neq n$, une seconde IPP donne $I = \left(\frac{2m+1}{2n+1}\right)^2 I$ donc $I = 0$.

2) a) Soit $\lambda > 0$. Rappelons que $\cos(x) = 0 \iff x \in \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Or $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} > 0$ et $(k + \frac{1}{2})\pi > 0$ si et seulement si $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0 &\iff \exists k \in \mathbb{N},\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{N},\ \lambda = \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}. \end{aligned}$$

b) L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est $\lambda r^2 + 1 = 0$. Comme $\lambda > 0$, les solutions de cette équation caractéristique sont $r = \pm \dfrac{i}{\sqrt{\lambda}}$. Ainsi, les solutions de l'équation différentielle $\lambda g'' + g = 0$ sont données par

$$g_{a,b}(x) = a\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x\right), \qquad \text{où } a, b \in \mathbb{C}.$$

Remarquons que

$$g_{a,b}(1) = g'_{a,b}(0) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{\sqrt{\lambda}} = 0 \\ \text{et} \\ a\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) + b\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ \text{et} \\ a = 0 \text{ ou } \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0. \end{cases}$$

Notons E_λ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\lambda g'' + g = 0 \quad \text{et} \quad g(1) = g'(0) = 0.$$

Ainsi, d'après la question I.2.a) :
si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \dfrac{4}{(2k+1)^2\pi^2}$, alors

$$E_\lambda = \{g_{a,0} : a \in \mathbb{C}\} \quad \text{où } g_{a,0}(x) = a\cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

sinon $E_\lambda = \{0\}$.

3) a) Pour tout $x \in [0,1]$, on a $F'(x) = f(x)$.

b) Fixons $x_0 \in [0,1]$. Pour tout $x \in [0,1]$, avec $x \neq x_0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x - x_0}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t - (x - x_0)f(x_0)\right) \\ &= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Notons $I_{x,x_0} = [x, x_0]$ si $x < x_0$ et $I_{x,x_0} = [x_0, x]$ si $x > x_0$. Par l'inégalité triangulaire, on en déduit que

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leqslant \sup_{t \in I_{x,x_0}} |f(t) - f(x_0)|.$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que

$$t \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [0,1] \implies |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Soit $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [0,1]$. Alors pour tout $t \in I_{x,x_0}$, on a $t \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [0,1]$ et donc $\sup_{t \in I_{x,x_0}} |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Ainsi, si $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [0,1]$, on a

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$. Ceci étant vérifié pour tout $x_0 \in [0,1]$, on en déduit que F est dérivable sur $[0,1]$ et $F' = f$.

On pouvait aussi utiliser un argument reposant sur le théorème de la moyenne mais en prenant soin de distinguer partie réelle et partie imaginaire (car la fonction f est supposée à valeurs complexes).

4) a) Soit $T : H \longrightarrow H$ une application linéaire continue sur un espace de Hilbert H. Pour tout $x \in H$, on a

$$\|T(x)\|_H^2 = \langle T(x), T(x)\rangle_H = \langle x, T^*(T(x))\rangle_H,$$

et l'inégalité de Cauchy Schwarz implique que

$$\|T(x)\|_H^2 \leqslant \|(T^* \circ T)(x)\|_H \|x\|_H.$$

b) En utilisant I.4.a), pour tout $x \in H$, $\|x\| \leqslant 1$, on a

$$\|T(x)\|_H^2 \leqslant \|T^* \circ T\| \|x\|_H^2 \leqslant \|T^* \circ T\|.$$

Par passage au sup sur la boule unité (fermée) de H, on obtient par définition de la norme d'une application linéaire continue que

$$\|T\|^2 \leqslant \|T^* \circ T\|. \tag{3.1}$$

D'autre part, la norme $\|\cdot\|$ étant une norme d'algèbre, on a $\|T^* \circ T\| \leqslant \|T^*\| \|T\|$, ce qui donne

$$\|T\|^2 \leqslant \|T^*\| \|T\|.$$

Si $\|T\| \neq 0$, en simplifiant par $\|T\|$, on obtient

$$\|T\| \leqslant \|T^*\|. \tag{3.2}$$

Cette inégalité est évidemment aussi vraie si $\|T\| = 0$, *i.e.* $T = 0$.
Rappelons maintenant que $(T^*)^* = T$ car pour tous $h_1, h_2 \in H$, on a

$$\langle h_1, (T^*)^*(h_2)\rangle_H = \langle T^*(h_1), h_2\rangle_H = \langle h_1, T(h_2)\rangle_H.$$

En appliquant (3.2) à T^*, on obtient que $\|T^*\| \leqslant \|(T^*)^*\| = \|T\|$. Ainsi, on en déduit finalement que $\|T\| = \|T^*\|$.
Finalement, en reprenant l'inégalité (3.1), on a

$$\|T\|^2 \leqslant \|T^* \circ T\| \leqslant \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2,$$

ce qui permet de conclure que $\|T\|^2 = \|T^* \circ T\|$.

5) Si x est dans $H_1 := \mathrm{Vect}\,\{b_n : n \geqslant 0\}$, l'espace vectoriel engendré par les b_n, alors on peut écrire x sous la forme

$$x = \sum_{n=0}^{N} a_n b_n,$$

où $N \in \mathbb{N}$ et $a_n \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant n \leqslant N$. Par linéarité de D_Λ, on a alors

$$D_\Lambda(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n D_\lambda(b_n) = \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda_n b_n.$$

En utilisant que $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est une base hilbertienne, on a donc (par la formule de Parseval appliquée deux fois) que

$$\|D_\Lambda(x)\|_H^2 = \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 |\lambda_n|^2 \leqslant \|\Lambda\|_\infty^2 \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 = \|\Lambda\|_\infty^2 \|x\|_H^2.$$

Ainsi, pour tout $x \in H_1$, on a $\|D_\Lambda(x)\|_H \leqslant \|\Lambda\|_\infty \|x\|_H$. Ceci prouve que D_Λ est continue de H_1 dans H et on a $\|D_\Lambda : H_1 \to H\| \leqslant \|\Lambda\|_\infty$. Comme H_1 est dense dans H (car $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est une base hilbertienne de H), le théorème de prolongement des applications linéaires continues implique

que D_Λ se prolonge en une (unique) application linéaire continue sur H (que l'on note encore D_Λ) avec
$$\|D_\Lambda\| = \|D_\Lambda : H_1 \to H\| \leqslant \|\Lambda\|_\infty.$$
D'autre part, pour tout $n \geqslant 0$, on a $\|b_n\| = 1$ et donc
$$|\lambda_n| = \|\lambda_n b_n\|_H = \|D_\Lambda(b_n)\|_H \leqslant \|D_\Lambda\| \|b_n\|_H = \|D_\Lambda\|.$$
Ainsi $\|\Lambda\|_\infty \leqslant \|D_\Lambda\|$, ce qui donne finalement que $\|D_\Lambda\| = \|\Lambda\|_\infty$.

Autre méthode : Soit $x \in H$. Comme $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est une base hilbertienne de H, on peut écrire
$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, b_n\rangle_H b_n,$$
avec
$$\|x\|_H^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, b_n\rangle_H|^2 < +\infty.$$
On pose alors
$$\widetilde{D_\Lambda}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \langle x, b_n\rangle_H b_n. \tag{3.3}$$
Remarquons que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_n \langle x, b_n\rangle_H|^2 \leqslant \|\Lambda\|_\infty^2 \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, b_n\rangle_H|^2 < +\infty,$$
et donc la série donnée par (3.3) converge dans H. De plus, on a
$$\|\widetilde{D_\Lambda}(x)\|_H^2 \leqslant \|\Lambda\|_\infty^2 \|x\|_H^2,$$
ce qui implique que l'application linéaire $\widetilde{D_\Lambda}$ est continue avec $\|\widetilde{D_\Lambda}\| \leqslant \|\Lambda\|_\infty$.
Enfin, remarquons que
$$\widetilde{D_\Lambda}(b_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \langle b_k, b_n\rangle_H b_n = \lambda_k b_k, \tag{3.4}$$
car $\langle b_k, b_n\rangle_H = 0$ si $n \neq k$, et 1 sinon. Donc $\widetilde{D_\Lambda}$ prolonge D_Λ.
On a l'unicité par linéarité, continuité et densité de $\mathrm{Vect}(b_n : n \geqslant 0)$ dans H. Le calcul de $\|\widetilde{D_\Lambda}\|$ se fait exactement comme précédemment en utilisant (3.4)

Partie II : Fonctions Gamma et Bêta

1) a) Soit $s > 0$. La fonction $t \longmapsto t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$. De plus, cette fonction est positive.
On a $t^{s-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{s-1}$ et $t \longmapsto t^{s-1}$ est intégrable en 0 car $s - 1 > -1$. Ainsi l'intégrale
$$\int_0^1 t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
converge.
De plus, on a (par critère de comparaison) $t^{s-1}\mathrm{e}^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ lorsque $t \to +\infty$. Comme $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de l'infini, on en déduit que
$$\int_1^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
converge.
Finalement, on conclut que Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

b) Pour $s > 0$, on a

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} t^s \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Effectuons une intégration par parties avec les deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, $u(t) = t^s$ et $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$. Fixons $0 < \varepsilon < M < +\infty$. La formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^M t^s \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= -\left[t^s \mathrm{e}^{-t}\right]_\varepsilon^M + s\int_\varepsilon^M t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \varepsilon^s \mathrm{e}^{-\varepsilon} - M^s \mathrm{e}^{-M} + s\int_\varepsilon^M t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Or $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^s \mathrm{e}^{-\varepsilon} = 0$ (car $s > 0$) et $\lim_{M\to+\infty} M^s \mathrm{e}^{-M} = 0$ (par croissance comparée). En faisant tendre ε vers 0 et M vers $+\infty$ dans (3.5), on obtient ainsi que

$$\Gamma(s+1) = s\int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = s\Gamma(s).$$

c) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}_n$ = “$\Gamma(n+1) = n!$” est vraie.

Pour $n = 0$, on a

$$\Gamma(1) = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} -\left[\mathrm{e}^{-t}\right]_0^A = -\left(\lim_{A\to+\infty}\mathrm{e}^{-A} - \mathrm{e}^0\right) = 1 = 0!\,.$$

Ainsi $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Supposons maintenant que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. En appliquant d'abord la question II.1.b) avec $s = n+1$, puis l'hypothèse de récurrence, on en déduit alors que

$$\Gamma(n+2) = \Gamma(n+1+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$$

autrement dit $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Ainsi, par le principe de récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(n+1) = n!$.

d) On a

- Pour tout $t > 0$, la fonction $s \longmapsto t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- Pour tout $s > 0$, la fonction $t \longmapsto t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue (donc mesurable) sur $]0,+\infty[$.
- Fixons $0 < a < b < +\infty$. Pour tout $a \leqslant s \leqslant b$, on a $0 \leqslant t^{s-1}\mathrm{e}^{-t} \leqslant t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}$ si $0 < t < 1$ et on a $0 \leqslant t^{s-1}\mathrm{e}^{-t} \leqslant t^{b-1}\mathrm{e}^{-t}$ si $t \geqslant 1$. Ainsi, on peut écrire que, pour tout $a \leqslant s \leqslant b$ et tout $t > 0$, on a
$$0 \leqslant t^{s-1}\mathrm{e}^{-t} \leqslant t^{a-1}\mathrm{e}^{-t} + t^{b-1}\mathrm{e}^{-t}.$$
Or, d'après II.1.a), puisque $\Gamma(a)$ et $\Gamma(b)$ existent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}(t^{a-1}\mathrm{e}^{-t} + t^{b-1}\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, on peut appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres qui implique que Γ est continue sur $[a,b]$, ceci quelque soit a,b avec $0 < a < b < +\infty$. On en déduit alors que Γ est continue sur $]0,\infty[$.

2) a) Soient $s, s' > 0$. La fonction $t \longmapsto t^{s-1}(1-t)^{s'-1}$ est continue sur $]0,1[$ donc localement intégrable sur $]0,1[$. De plus, cette fonction est positive. On a $t^{s-1}(1-t)^{s'-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{s-1}$ et $t \longmapsto t^{s-1}$ est intégrable en 0 car $s-1 > -1$. Ainsi l'intégrale

$$I(s,s') = \int_0^{1/2} t^{s-1}(1-t)^{s'-1}\,\mathrm{d}t$$

converge. De même, $t^{s-1}(1-t)^{s'-1} \underset{t\to 1^-}{\sim} (1-t)^{s'-1}$ et $t \longmapsto (1-t)^{s'-1}$ est intégrable en 1 car $s'-1>-1$. Ainsi l'intégrale

$$J(s,s') = \int_{1/2}^{1} t^{s-1}(1-t)^{s'-1}\,\mathrm{d}t$$

converge.

On peut aussi invoquer un argument de symétrie en remarquant que $J(s,s') = I(s',s)$, via le changement de variable $t \mapsto 1-t$.

Finalement, on en déduit que B est bien définie sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

b) (i) Si $(x,y) \in]0,+\infty[\times]0,1[$, il est clair que $xy>0$ et $x(1-y)>0$ et donc φ est bien à valeurs dans $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Maintenant si $(u,v)\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, on a

$$\varphi(x,y) = (u,v) \Longleftrightarrow \begin{cases} xy = u \\ \\ x = xy+v = u+v \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{u}{u+v} \\ \\ x = u+v \end{cases}.$$

Remarquons que $x>0$ et $y\in]0,1[$. Ceci prouve que φ est bien une bijection de $]0,+\infty[\times]0,1[$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, et que

$$\varphi^{-1}(u,v) = \left(u+v, \frac{u}{u+v}\right), \qquad \text{pour } (u,v)\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[.$$

Il est clair que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[\times]0,1[$ (car ses composantes sont des polynômes en x et y) et φ^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ (car ses composantes sont des polynômes ou fractions rationnelles en u et v dont le dénominateur ne s'annule pas). Ainsi φ est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

(ii) Remarquons que toutes les fonctions intégrandes qui interviennent dans les expressions des fonctions Γ et B sont positives et donc on peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli. Ainsi, pour tout $s,s'>0$, on a

$$\Gamma(s)\Gamma(s') = \int_{]0,+\infty[^2} u^{s-1}v^{s'-1}\mathrm{e}^{-(u+v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

On va faire le changement de variable $(u,v)=\varphi(x,y)$. On sait d'après la question II.2.b.(i) que φ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $]0,+\infty[\times]0,1[$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. De plus, la matrice Jacobienne de φ au point $(x,y)\in]0,+\infty[\times]0,1[$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} y & x \\ 1-y & -x \end{pmatrix}.$$

Ainsi le jacobien de φ est

$$\mathrm{Jac}(\varphi)(x,y) = -xy - x(1-y) = -x,$$

et donc $|\mathrm{Jac}(\varphi)(x,y)| = x$. Ainsi, par la formule de changement de variable, comme $u+v=x$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(s') &= \int_{]0,+\infty[\times]0,1[} (xy)^{s-1}\,(x(1-y))^{s'-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{]0,+\infty[\times]0,1[} x^{s+s'-1}\mathrm{e}^{-x}y^{s-1}(1-y)^{s'-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

En appliquant une nouvelle fois le théorème de Fubini-Tonelli, on en déduit que

$$\Gamma(s)\Gamma(s') = \int_0^{+\infty} x^{s+s'-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \int_0^1 y^{s-1}(1-y)^{s'-1}\,\mathrm{d}y = \Gamma(s+s')B(s,s').$$

On obtient la relation demandée, à savoir que, pour tous $s, s' > 0$, on a

$$\Gamma(s)\Gamma(s') = \Gamma(s+s')B(s,s')$$

3) a) Pour $n \geqslant 1$, on a

$$I_n(0) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2i\pi nu}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2i\pi n}\left[\mathrm{e}^{-2i\pi nu}\right]_0^1 = -\frac{1}{2i\pi n}\left(\mathrm{e}^{-2i\pi n} - \mathrm{e}^0\right) = 0.$$

b) Les intégrales $I_n(\alpha)$ et $I_n(\alpha-1)$ sont bien définies puisque $\alpha - 1 > -1$.
Les fonctions $u \longmapsto u^\alpha$ et $u \longmapsto \mathrm{e}^{-2i\pi nu}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$ et, comme $\alpha > 0$, on a $\lim_{u\to 0} u^\alpha \mathrm{e}^{-2i\pi nu} = 0$. On peut donc effectuer une intégration par parties généralisée et on obtient

$$I_n(\alpha) = -\frac{1}{2i\pi n}\left[u^\alpha\mathrm{e}^{-2i\pi nu}\right]_0^1 + \frac{\alpha}{2i\pi n}\int_0^1 u^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-2i\pi nu}\,\mathrm{d}u,$$

soit

$$I_n(\alpha) = -\frac{1}{2i\pi n} + \frac{\alpha}{2i\pi n}\int_0^1 u^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-2i\pi nu}\,\mathrm{d}u.$$

Il reste à remarquer que $I_n(\alpha-1) = \displaystyle\int_0^1 u^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-2i\pi nu}\,\mathrm{d}u = O(1)$.

Pour cela, remarquons que $|\mathrm{e}^{-2i\pi nu}| = 1$ et donc $\left|\displaystyle\int_0^1 u^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-2i\pi nu}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha}$, ce qui permet de conclure que $I_n(\alpha) = O(1/n)$.

c) Rappelons que $\log(z) = \log|z| + i\arg_{]-\pi,\pi[}(z)$, pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, qui est un ouvert étoilé, et C_ε est un lacet contenu dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. Donc par le théorème de Cauchy, on a

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

D'où

$$0 = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[1,\varepsilon]} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[-i\varepsilon,-i]} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{3.6}$$

En paramétrant l'arc de cercle γ_r par $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{it}$, pour $t \in [-\pi/2, 0]$, on a

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(r\mathrm{e}^{it})ir\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = ir\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \exp(\alpha\log(r\mathrm{e}^{it}) - 2i\pi nr\mathrm{e}^{it} + it)\,\mathrm{d}t.$$

Or $\log(re^{it}) = \log(r) + it$, lorsque $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant 0$ et donc

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z = ir\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \exp(\alpha\log(r) + i\alpha t - 2i\pi nr\mathrm{e}^{it} + it)\,\mathrm{d}t. \tag{3.7}$$

De plus,

$$\int_{[1,\varepsilon]} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\varepsilon^1 f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\varepsilon^1 \exp(\alpha\log(t) - 2i\pi nt)\,\mathrm{d}t,$$

soit

$$\int_{[1,\varepsilon]} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\varepsilon^1 t^\alpha\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t. \tag{3.8}$$

De même, on a

$$\int_{[-i\varepsilon,-i]} f(z)\,\mathrm{d}z = -i\int_{\varepsilon}^{1} f(-it)\,\mathrm{d}t = -i\int_{\varepsilon}^{1} \exp(\alpha\log(-it) - 2\pi nt)\,\mathrm{d}t.$$

Or $\log(-it) = \log(t) - i\frac{\pi}{2}$ pour $t > 0$, d'où

$$\int_{[-i\varepsilon,-i]} f(z)\,\mathrm{d}z = -i\int_{\varepsilon}^{1} \exp(\alpha\log(t) - i\alpha\frac{\pi}{2} - 2\pi nt)\,\mathrm{d}t,$$

soit

$$\int_{[-i\varepsilon,-i]} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{-(\alpha+1)\frac{i\pi}{2}}\int_{\varepsilon}^{1} t^{\alpha}\mathrm{e}^{-2\pi nt}\,\mathrm{d}t. \tag{3.9}$$

En utilisant (3.6), (3.7), (3.8) et (3.9), on en déduit que

$$\int_{\varepsilon}^{1} t^{\alpha}\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t = i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \exp(i\alpha t - 2i\pi n\mathrm{e}^{it} + it)\,\mathrm{d}t - i\varepsilon\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \exp(\alpha\log\varepsilon + i\alpha t - 2i\pi n\varepsilon\mathrm{e}^{it} + it)\,\mathrm{d}t +$$
$$+\,\mathrm{e}^{-(\alpha+1)\frac{i\pi}{2}}\int_{\varepsilon}^{1} t^{\alpha}\mathrm{e}^{2\pi nt}\,\mathrm{d}t. \tag{3.10}$$

La fonction $t \longmapsto t^{\alpha}\mathrm{e}^{2i\pi nt}$ est continue sur $]0,1]$, et $|t^{\alpha}\mathrm{e}^{-2i\pi nt}| = t^{\alpha}$ avec $\int_0^1 t^{\alpha}\,\mathrm{d}t$ convergente (car $\alpha > -1$). Ainsi l'intégrale

$$\int_0^1 t^{\alpha}\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t$$

converge et on a donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1} t^{\alpha}\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{\alpha}\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t = I_n(\alpha). \tag{3.11}$$

De même, l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha}\mathrm{e}^{-2\pi nt}\,\mathrm{d}t$ converge (en 0, on a $t^{\alpha}\mathrm{e}^{-2\pi nt} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{\alpha}$) et donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1} t^{\alpha}\mathrm{e}^{-2\pi nt}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{\alpha}\mathrm{e}^{-2\pi nt}\,\mathrm{d}t. \tag{3.12}$$

Enfin, pour tout $t \in [-\pi/2, 0]$, en utilisant que $\sin(t) \leqslant 0$, on a

$$\left|\exp\left(\alpha\log(\varepsilon) + i\alpha t - 2i\pi n\varepsilon\mathrm{e}^{it} + it\right)\right| = \varepsilon^{\alpha}\mathrm{e}^{2\pi n\varepsilon\sin(t)} \leqslant \varepsilon^{\alpha},$$

d'où

$$\left|i\varepsilon\int_{-\pi/2}^{0} \exp\left(\alpha\log(\varepsilon) + i\alpha t - 2i\pi n\varepsilon\mathrm{e}^{it} + it\right)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\varepsilon^{\alpha+1} \to 0, \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0,$$

car $\alpha + 1 > 0$. D'où, en passant à la limite dans (3.10), et en utilisant (3.11) et (3.12), on en déduit que

$$I_n(\alpha) = R_n(\alpha) + \mathrm{e}^{-(\alpha+1)\frac{i\pi}{2}}\int_0^1 t^{\alpha}\mathrm{e}^{2\pi nt}\,\mathrm{d}t.$$

d) On a

$$|R_n(\alpha)| \leqslant \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathrm{e}^{2\pi n\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta,$$

et en utilisant le changement de variable $t = -\theta$, on en déduit que

$$|R_n(\alpha)| \leqslant \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-2\pi n \sin(t)} \,\mathrm{d}t.$$

Par concavité de $t \longmapsto \sin(t)$ sur $[0, \pi/2]$, on a $\sin(t) \geqslant \frac{2}{\pi} t$ (le graphe est au dessus de ses cordes). On en déduit alors que

$$|R_n(\alpha)| \leqslant \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-4nt} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{4n}(1 - \mathrm{e}^{-2n\pi}) \leqslant \frac{1}{4n},$$

ce qui prouve que $R_n(\alpha) = O(1/n)$.

e) En utilisant les questions II.3.c) et II.3.d), on a donc

$$I_n(\alpha) = \mathrm{e}^{-(\alpha+1)\frac{i\pi}{2}} \int_0^1 u^\alpha \mathrm{e}^{-2\pi n u} \,\mathrm{d}u + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or en utilisant le changement de variable $v = 2\pi n u$, on a

$$\int_0^1 u^\alpha \mathrm{e}^{-2\pi n u} \,\mathrm{d}u = \frac{1}{(2\pi n)^{\alpha+1}} \int_0^{2\pi n} v^\alpha \mathrm{e}^{-v} \,\mathrm{d}v.$$

Or $\displaystyle\int_0^{2\pi n} v^\alpha \mathrm{e}^{-v} \,\mathrm{d}v \longrightarrow \Gamma(\alpha+1)$ lorsque $n \to +\infty$, ce qu'on peut réécrire comme

$$\int_0^{2\pi n} v^\alpha \mathrm{e}^{-v} \,\mathrm{d}v = \Gamma(\alpha+1) + o(1), \quad n \to +\infty.$$

Ainsi

$$I_n(\alpha) = \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+1)\frac{i\pi}{2}}}{(2\pi n)^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1) + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme $-1 < \alpha < 0$, le terme $O\left(\frac{1}{n}\right)$ est $o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ car $\alpha + 1 < 1$, et donc

$$I_n(\alpha) = \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+1)\frac{i\pi}{2}}}{(2\pi n)^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1) + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).$$

Autrement dit,

$$I_n(\alpha) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2\pi n)^{\alpha+1}} \,\mathrm{e}^{-(\alpha+1)\frac{i\pi}{2}}.$$

Partie III : L'opérateur d'intégration sur $C([0,1])$.

1) a) D'après la question I.3.b), pour tout $f \in C([0,1])$, $J(f)$ est dérivable sur $[0,1]$ et en particulier, on a $J(f) \in C([0,1])$. L'application J est clairement linéaire par linéarité de l'intégrale. Enfin, pour toute $f \in C([0,1])$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$|J(f)(x)| \leqslant \int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant x\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty,$$

ce qui donne $\|J(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. On en déduit que l'application linéaire J est continue et $\|J\| \leqslant 1$. D'autre part si $f(t) = p_0(t) = 1$ pour $t \in [0,1]$, on a $\|p_0\|_\infty = 1$ et $J(p_0)(x) = x$, d'où $\|J(p_0)\|_\infty = 1$. Par définition de la norme d'une application linéaire, on en déduit donc que $\|J\| = 1$.

b) Soit $f \in C([0,1])$ telle que $F = J(f) = 0$. En utilisant la question I.3.b), on sait que F est dérivable et $F' = f$. On en déduit donc que $f = 0$. Ainsi, $\ker(J) = \{0\}$ et J est injective.

c) L'application J n'est pas surjective.

En effet, supposons le contraire et considérons $g \in C([0,1])$ qui n'est pas dérivable sur $[0,1]$. Par exemple, on peut considérer $g(t) = \left|t - \frac{1}{2}\right|$, ou encore $t \mapsto \sqrt{t}$, pour $t \in [0,1]$. Si J était surjective, alors il existerait $f \in C([0,1])$ telle que $J(f) = g$. Mais alors d'après la question I.3.b) la fonction g serait dérivable sur $[0,1]$, ce qui n'est pas vraie. On conclut donc que J n'est pas surjective.

Autre méthode : On peut aussi remarquer que pour toute fonction $f \in C([0,1])$, on a $J(f)(0) = 0$, et la fonction constante égale à 1 est bien une fonction de $C([0,1])$ mais qui n'est pas dans l'image de J et donc J n'est pas surjective.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, et $f \in C([0,1])$ telle que $J(f) = \lambda f$. On a $f = \lambda^{-1}J(f)$. Or, d'après la question I.3.b), la fonction $J(f)$ est dérivable sur $[0,1]$ et $(J(f))' = f$. Ainsi f est dérivable sur $[0,1]$ et $f' = \lambda^{-1} f$. On en déduit alors que f' est continue sur $[0,1]$ et donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. De plus, la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$y' = \lambda^{-1} y.$$

3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et supposons que λ soit une valeur propre de J. Alors, il existe $f \in C([0,1])$, avec $f \neq 0$, telle que $J(f) = \lambda f$.

Si $\lambda = 0$, on a alors $J(f) = 0$ et la question III.1.b) implique que $f = 0$, ce qui est absurde.

Si $\lambda \neq 0$, la question III.2) implique que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et solution de l'équation différentielle

$$y' = \lambda^{-1} y.$$

On sait que les solutions de cette équation différentielle sont de la forme $y_k(x) = k\mathrm{e}^{-\lambda^{-1}x}$, où $k \in \mathbb{C}$. Donc il existe $k \in \mathbb{C}$ telle que $f(x) = k\mathrm{e}^{-\lambda^{-1}x}$, pour $x \in [0,1]$. D'autre part, comme $J(f)(0) = 0$, on a $f(0) = \lambda^{-1}J(f)(0) = 0$. On en déduit $k = f(0) = 0$. Ainsi $f = 0$, ce qui est aussi une contradiction. Ainsi, on peut conclure que J n'a aucune valeur propre.

Autre méthode : Si $\lambda \neq 0$, on peut aussi invoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour dire que l'unique solution de l'équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficients constants $f' = \dfrac{1}{\lambda} f$ et $f(0) = 0$, est $f = 0$.

4) Soient $f \in C([0,1])$.

a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante est vraie : "$J^n(f)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,1]$ et pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $(J^n(f))^{(k)} = J^{n-k}(f)$".

Pour $n = 0$, on a $J^0(f) = f$ est continue sur $[0,1]$, i.e. de classe $\mathscr{C}^0$, et

$$(J^0(f))^{(0)} = f^{(0)} = f = J^{0-0}(f).$$

Ainsi $\mathscr{P}_0$ est vraie. Supposons maintenant la propriété $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier $n \geqslant 0$. On a $J^{n+1}(f) = J(J^n(f))$. Donc, d'après la question I.3 appliquée à $J^n(f)$ (qui est bien continue car $\mathscr{C}^n$ sur $[0,1]$), $J^{n+1}(f)$ est dérivable sur $[0,1]$ et

$$(J^{n+1}(f))' = J^n(f). \tag{3.13}$$

Comme $J^n(f)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,1]$ puisque $\mathscr{P}_n$ est supposée vraie, on en déduit que $J^{n+1}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0,1]$.
De plus, si $k=0$, on a

$$(J^{n+1}(f))^{(0)} = J^{n+1}(f) = J^{n+1-0}(f),$$

et pour $1 \leqslant k \leqslant n+1$, en utilisant (3.13), on a

$$(J^{n+1}(f))^{(k)} = ((J^{n+1}(f))')^{(k-1)} = (J^n(f))^{(k-1)}.$$

L'hypothèse de récurrence donne, puisque $k-1 \leqslant n$, que

$$(J^{n+1}(f))^{(k)} = J^{n-(k-1)}(f) = J^{n+1-k}(f),$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

b) D'après la question III.4.a), on a pour $0 \leqslant k < n$ soit $n-k-1 \geqslant 0$,

$$(J^n(f))^{(k)}(0) = J^{n-k}(f)(0) = J(J^{n-k-1}(f))(0) = 0,$$

car si $g \in C([0,1])$, on a $J(g)(0) = 0$.

c) On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n à $J^n(f)$ qui est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,1]$. On obtient que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \geqslant 1$, on a

$$(J^n(f))(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(J^n(f))^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} (J^n(f))^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or d'après la question III.4.b), pour tout $0 \leqslant k < n$, on a $(J^n(f))^{(k)}(0) = 0$, ce qui donne

$$(J^n(f))(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} (J^n(f))^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il reste à remarquer, d'après la question III.4.a), qu'on a $(J^n(f))^{(n)} = J^{n-n}(f) = f$, d'où

$$(J^n(f))(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

5) a) Soit $f \in C([0,1])$ avec $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Pour tous $x, y \in [0,1]$, on a

$$|J(f)(x) - J(f)(y)| = \left| \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \|f\|_\infty |x-y| \leqslant |x-y|,$$

ce qui prouve que $J(f)$ est 1-lipschitzienne sur $[0,1]$.
Rédaction alternative : puisque $J(f)' = f$, on a $\sup_{t\in[0,1]} |J(f)'(t)| = \|f\|_\infty \leqslant 1$ et l'inégalité des accroissements finis implique que $J(f)$ est 1-lipschitzienne sur $[0,1]$.

b) D'après la définition d'une application linéaire compacte, nous devons montrer que l'ensemble $A := \{Jf : f \in C([0,1]), \|f\|_\infty \leqslant 1\}$ est relativement compacte dans $C([0,1])$. Pour cela, nous allons utiliser le théorème d'Ascoli. Autrement dit, nous devons montrer que

- A est équicontinue en tout point de $[0,1]$.
- pour tout $x \in [0,1]$, l'ensemble $\{g(x) : g \in A\}$ est borné.

Le premier point est clair car d'après la question III.5.a), pour $g = J(f)$ avec $f \in C([0,1])$ et $\|f\|_\infty \leqslant 1$, la fonction g est 1-lipschitzienne et donc : pour tout $\varepsilon > 0$, et tous $x, y \in [0,1]$, on a $|g(y) - g(x)| \leqslant \varepsilon$ dès que $|x - y| \leqslant \varepsilon$.
Le second point est aussi clair car si $g \in A$, on a $\|g\|_\infty \leqslant 1$ (d'après la question III.1.a) par exemple).
On peut alors appliquer le théorème d'Ascoli qui implique que A est une partie relativement compacte de $C([0,1])$.

Partie IV : L'opérateur d'intégration sur $L^2(0,1)$.

1) a) Soient $f \in L^2(0,1)$ et $x, x_0 \in [0,1]$. Supposons que $x \geqslant x_0$. On a

$$|V(f)(x) - V(f)(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Par Cauchy-Schwarz, on en déduit que

$$|V(f)(x) - V(f)(x_0)| \leqslant \left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \right)^{1/2} \left(\int_{x_0}^{x} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \right) \leqslant \sqrt{x - x_0}\|f\|_2.$$

Le cas $x \leqslant x_0$ est symétrique et on obtient donc finalement que pour tout $x, x_0 \in [0,1]$, on a

$$|V(f)(x) - V(f)(x_0)| \leqslant \sqrt{|x - x_0|}\,\|f\|_2. \tag{3.14}$$

Cette inégalité implique clairement que $V(f)$ est continue sur $[0,1]$ (en fait V est 1/2-Hölderienne). Ainsi $V(L^2(0,1)) \subset C([0,1])$.
Remarquons alors que $C([0,1]) \subset L^2(0,1)$ et pour toute fonction $g \in C([0,1])$ (et même toute fonction bornée sur $[0,1]$), on a

$$\|g\|_2 \leqslant \|g\|_\infty. \tag{3.15}$$

On en déduit alors que $V(L^2(0,1)) \subset L^2(0,1)$ et V est linéaire (par linéarité de l'intégrale). De plus, si on utilise (3.14) avec $x_0 = 0$, en tenant compte du fait que $V(f)(0) = 0$, on a, pour tout $x \in [0,1]$,

$$|V(f)(x)| \leqslant \sqrt{x}\|f\|_2 \leqslant \|f\|_2. \tag{3.16}$$

D'où, avec (3.15), on obtient que

$$\|V(f)\|_2 \leqslant \|V(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_2.$$

Ainsi V est continue de $L^2(0,1)$ dans $L^2(0,1)$ et on a $\|V\| \leqslant 1$.

b) Soient $f, g \in L^2(0,1)$. On a

$$\langle g, V^*(f) \rangle_2 = \langle V(g), f \rangle_2 = \int_0^1 V(g)(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

En utilisant la définition de $V(g)$, on obtient

$$\langle g, V^*(f) \rangle_2 = \int_0^1 \left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \right) \overline{f(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{3.17}$$

Remarquons que $L^2(0,1) \subset L^1(0,1)$ (avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz) et le théorème de Fubini-Tonelli permet d'écrire que

$$\int_0^1 \int_0^x |g(t)||f(x)| \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \int_0^1 |g(t)||f(x)| \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_0^1 |g(t)| \,\mathrm{d}t \int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x < +\infty.$$

L'application du théorème de Fubini est donc licite dans (3.18) et on obtient

$$\langle g, V^*(f)\rangle_2 = \int_0^1 g(t) \left(\int_t^1 \overline{f(x)} \,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}t. \tag{3.18}$$

Posons alors pour $t \in [0,1]$, $T(f)(t) = \displaystyle\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Remarquons par la relation de Chasles que

$$T(f)(t) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - V(f)(t).$$

Autrement dit, $T(f) = V(f)(1) - V(f)$. Comme on l'a vu dans la question IV.1.a) (ou à nouveau parce que $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2$), on a $|V(f)(1)| \leqslant \|f\|_2$ et $\|V\| \leqslant 1$. Ainsi on obtient que

$$\|T(f)\|_2 \leqslant |V(f)(1)| + \|V(f)\|_2 \leqslant 2\|f\|_2.$$

Variante : on peut aussi remarquer que pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$|T(f)(t)| \leqslant \int_t^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = \|f\|_1 \leqslant \|f\|_2,$$

et donc avec l'inégalité (3.15), on en déduit que $\|T(f)\|_2 \leqslant \|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_2$.
On a ainsi prouvé que T est une application linéaire continue de $L^2(0,1)$ dans lui même. L'équation (3.18) implique alors que

$$\langle g, V^*(f)\rangle_2 = \int_0^1 g(t)\overline{T(f)(t)}\,\mathrm{d}t = \langle g, T(f)\rangle_2.$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour toute fonction $g \in L^2(0,1)$, on en déduit que $V^*(f) = T(f)$ dans $L^2(0,1)$. Autrement dit, pour presque tout $x \in [0,1]$, on a

$$V^*(f)(x) = T(f)(x) = \int_x^1 f(u)\,\mathrm{d}u.$$

2) a) On a d'une part, en utilisant la définition de l'adjoint,

$$\langle (V^* \circ V)(h), h\rangle_2 = \langle V(h), V(h)\rangle_2 = \|V(h)\|_2^2,$$

et d'autre part, en utilisant que h est un vecteur propre de $V^* \circ V$,

$$\langle (V^* \circ V)(h), h\rangle_2 = \langle \lambda h, h\rangle_2 = \lambda\|h\|_2^2.$$

Ainsi $\lambda\|h\|_2^2 = \|V(h)\|_2^2$, et comme $h \neq 0$, on en déduit que $\lambda = \dfrac{\|V(h)\|_2^2}{\|h\|_2^2} > 0$.

b) Comme $\lambda \neq 0$, pour presque tout $x \in [0,1]$, on a

$$h(x) = \frac{1}{\lambda}(V^* \circ V)(h)(x).$$

Considérons pour $x \in [0,1]$,

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\int_x^1 V(h)(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.19}$$

D'après ce qui précède, on a $f(x) = h(x)$ pour presque tout $x \in [0,1]$. De plus, f est continue. En effet, d'après la question IV.1.a), $V(h) \in C([0,1])$ et on remarque (comme dans la question IV.1.b)) que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\lambda f(x) = \int_0^1 V(h)(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x V(h)(t)\,\mathrm{d}t = c - V(V(h))(x) = c - V^2(h)(x), \tag{3.20}$$

avec $c = \displaystyle\int_0^1 V(h)(t)\,\mathrm{d}t$. D'après IV.1.a), $V(h) \in C([0,1])$ et donc d'après III.1.a), on a $V^2(h) = J(V(h)) \in C([0,1])$. Comme $\lambda \neq 0$, ceci prouve que $f \in C([0,1])$.
Enfin, comme $f = h$ presque partout, on a $V^2(f) = V^2(h)$ et l'équation (3.20) implique que $\lambda f = c - V^2(f)$, et cette égalité a lieu pour *tout* $x \in [0,1]$.

c) Remarquons que comme f est continue, on a $V(f) = J(f)$ et $V^2(f) = J^2(f)$. D'après la question IV.2.b), comme $\lambda \neq 0$, on a

$$f = \frac{c}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} J^2(f). \tag{3.21}$$

D'après III.4.a), $J^2(f)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et on a $(J^2(f))'' = J^{2-2}(f) = J^0(f) = f$. L'équation (3.21) implique alors que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$f''(x) = -\frac{1}{\lambda} f(x).$$

D'autre part, d'après (3.19), on a $f(1) = 0$ et en utilisant (3.21) (par exemple) et la question I.3), on obtient aussi que

$$f' = -\frac{1}{\lambda}(J^2(f))' = -\frac{1}{\lambda} J(f).$$

En particulier, $f'(0) = 0$. Tout ceci permet d'affirmer que $f \in E_\lambda$ (où E_λ est définie à la question I.2.). Or, d'après la question I.2.b), si $\lambda \neq \lambda_k := 4(2k+1)^{-2}\pi^{-2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $E_\lambda = \{0\}$. Ainsi, si λ est une valeur propre de $V^* \circ V$, nécessairement $\lambda = \lambda_k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Dans ce cas, si h_k est un vecteur propre (non nul) de $V^* \circ V$ dans $L^2(0,1)$ associé à la valeur propre λ_k, alors, d'après ce qui précède, il existe $\tilde{h}_k \in E_{\lambda_k}$ telle que $\tilde{h}_k = h_k$ presque partout. En utilisant une nouvelle fois la question I.2.b), il existe $a \in \mathbb{C}$ telle que $\tilde{h}_k(x) = a\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} x\right)$. Ainsi, pour presque tout $x \in [0,1]$,

$$h_k(x) = a\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} x\right) = a\cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right).$$

Réciproquement, on vérifie que si $h_k(x) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right)$, alors (en intégrant), on a $V(h_k)(x) = \frac{2}{(2k+1)\pi}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right)$. Puis en réintégrant, on a

$$V^*(V(h_k)(x) = \int_x^1 V(h_k)(t)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}\left[-\cos\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)\right]_x^1 = \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2} h_k(x),$$

soit $(V^* \circ V)(h_k) = \lambda_k h_k$.
Finalement, on a prouvé que les valeurs propres de $V^* \circ V$ sont les $\lambda_k = \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}$, $k \in \mathbb{N}$, et

$$\ker(V^* \circ V - \lambda_k) = \mathbb{C} h_k,$$

où $h_k(x) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right)$.

3) a) Remarquons que

$$|G(u)| = \begin{cases} |g(2u)| & \text{si } u \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ |g(-2u)| & \text{si } u \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\end{cases}.$$

Or $g \in L^2(0,1)$ et donc clairement (par 1-périodicité), $G \in L^2(0,1)$. Par conséquent, $\widehat{G}(n)$ est bien définie et on a

$$\widehat{G}(n) = \int_0^1 G(t) \mathrm{e}^{-2i\pi nt} \, \mathrm{d}t.$$

Par 1-périodicité, on a

$$\widehat{G}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} G(t) \mathrm{e}^{-2i\pi nt} \, \mathrm{d}t.$$

D'où

$$\widehat{G}(n) = \int_{-1/2}^{0} g(-2t) \mathrm{e}^{-i\pi t - 2i\pi nt} \, \mathrm{d}t + \int_0^{1/2} g(2t) \mathrm{e}^{-i\pi t - 2i\pi nt} \, \mathrm{d}t.$$

Effectuons le changement de variable $u = -t$ dans la première intégrale. Cela donne

$$\begin{aligned} \widehat{G}(n) &= \int_0^{1/2} g(2u) \mathrm{e}^{i\pi u + 2i\pi nu} \, \mathrm{d}u + \int_0^{1/2} g(2t) \mathrm{e}^{-i\pi t - 2i\pi nt} \, \mathrm{d}t. \\ &= \int_0^{1/2} g(2t) \left(\mathrm{e}^{(2n+1)i\pi t} + \mathrm{e}^{-(2n+1)i\pi t} \right) \mathrm{d}t \\ &= 2 \int_0^{1/2} g(2t) \cos((2n+1)\pi t) \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Il reste à effectuer le changement de variable $s = 2t$ et on obtient

$$\widehat{G}(n) = \int_0^1 g(s) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi s}{2} \right) \mathrm{d}s.$$

b) Soit $g \in L^2(0,1)$ telle que g est orthogonal au sous-espace engendré par les f_n, $n \in \mathbb{N}$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 = \langle g, f_n \rangle_2 = \sqrt{2} \int_0^1 g(s) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi s}{2} \right) \mathrm{d}s.$$

D'après la question IV.5.a), cela implique que $\widehat{G}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
D'autre part, si $n > 0$, en utilisant la parité du cosinus, on a

$$\widehat{G}(-n) = \int_0^1 g(s) \cos\left(\frac{(-2n+1)\pi s}{2} \right) \mathrm{d}s = \int_0^1 g(s) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi s}{2} \right) \mathrm{d}s = \widehat{G}(n-1) = 0.$$

Finalement, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\widehat{G}(n) = 0$. Par injectivité de l'application $G \longmapsto (\widehat{G}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$, on en déduit que $G = 0$ dans $L^2(0,1)$. Finalement, cela implique que pour presque tout $u \in [0, 1/2]$, $g(2u) = 0$, soit pour presque tout $u \in [0,1]$, on a $g(u) = 0$. Ainsi $g = 0$ dans $L^2(0,1)$. Donc l'orthogonal du sous-espace engendré par les f_n, $n \in \mathbb{N}$, est $\{0\}$, ce qui est équivalent au fait que le sous-espace engendré par les f_n, $n \in \mathbb{N}$, est dense dans $L^2(0,1)$.
D'autre part, d'après la question I.1., on a

$$\langle f_n, f_m \rangle_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi, $(f_n)_{n \geqslant 0}$ est une famille orthonormale de $L^2(0,1)$. On en déduit alors que la famille $(f_n)_{n \geqslant 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(0,1)$.

4) Pour tout $n \geqslant 0$, on a $(V^* \circ V)(f_n) = \lambda_n f_n$, avec $\lambda_n = \dfrac{4}{(2n+1)^2\pi^2}$ d'après la question IV.2.c). Comme $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(0,1)$, on a, avec les notations de I.5, que $V^* \circ V = D_\Lambda$, avec $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ et $b_n = f_n$. On en déduit donc que

$$\|V^* \circ V\| = \|\Lambda\|_\infty.$$

Or la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et donc $\|\Lambda\|_\infty = |\lambda_0| = \dfrac{4}{\pi^2}\cdot$ Donc

$$\|V^* \circ V\| = \frac{4}{\pi^2}\cdot$$

5) D'après la question I.4.b), on a $\|V\|^2 = \|V^* \circ V\|$. On déduit donc de la question IV.4) que

$$\|V\| = \frac{2}{\pi}\cdot$$

Partie V : Un semi-groupe d'opérateurs.

1) On peut se ramener aux résultats du programme sur la convolution dans $\mathbb{R}$: on peut définir $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$ par $\tilde{f} = f$ sur $[0,1]$ et $\tilde{f} = 0$ ailleurs. De la même façon, on définit $\tilde{w}$ et on note la convolution de la même façon :

$$(\tilde{w} * \tilde{f})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}(x-t)\tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{où } x \in \mathbb{R}.$$

On remarque que $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R})$, $\tilde{w} \in L^1(\mathbb{R})$, avec $\|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^p(0,1)}$ et $\|\tilde{w}\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|w\|_{L^1(0,1)}$. Un théorème classique sur la convolution (dans $\mathbb{R}$) implique alors que $(\tilde{w} * \tilde{f})(x)$ est bien défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, $(\tilde{w} * \tilde{f}) \in L^p(\mathbb{R})$ et

$$\|\tilde{w} * \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant \|\tilde{w}\|_{L^1(\mathbb{R})}\,\|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Il reste à remarquer que $(\tilde{w} * \tilde{f})(x) = (w * f)(x)$ pour presque tout $x \in [0,1]$ d'où la conclusion.

<u>Autre méthode</u> : soit $p \geqslant 1$ et $f \in L^p(0,1)$. Alors, en particulier $f \in L^1(0,1)$ (inégalité de Hölder pour $p \geqslant 1$). En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\int_0^1 \left(\int_0^x |w(x-t)||f(t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 |f(t)| \left(\int_t^1 |w(x-t)|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t.$$

Or, en utilisant le changement de variable $u = x - t$, on a

$$\int_t^1 |w(x-t)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{1-t} |w(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 |w(u)|\,\mathrm{d}u = \|w\|_{L^1(0,1)}.$$

D'où

$$\int_0^1 \left(\int_0^x |w(x-t)||f(t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \leqslant \|w\|_{L^1(0,1)}\|f\|_{L^1(0,1)} < +\infty.$$

Ainsi, pour presque tout $x \in [0,1]$, on a

$$\int_0^x |w(x-t)||f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty,$$

et donc $(w * f)(x)$ est bien défini pour presque tout $x \in [0,1]$.

D'autre part, remarquons que

$$(w * f)(x) = \int_0^1 w(t) f(x-t) \mathbb{1}_{(0,x)}(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 w(t) F_t(x) \, \mathrm{d}t,$$

où $F_t(x) = f(x-t)\mathbb{1}_{(t,1)}(x)$.
Il est clair que la fonction F_t est dans $L^p(0,1)$ et on a $\|F_t\|_{L^p(0,1)} \leqslant \|f\|_{L^p(0,1)}$. Ainsi, par l'inégalité triangulaire intégrale dans L^p,

$$\|w * f\|_{L^p(0,1)} \leqslant \int_0^1 |w(t)| \|F_t\|_{L^p(0,1)} \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 |w(t)| \|f\|_{L^p(0,1)} \, \mathrm{d}t = \|w\|_{L^1(0,1)} \|f\|_{L^p(0,1)} < +\infty.$$

Ceci prouve que $w * f$ est dans $L^p(0,1)$ et l'inégalité demandée.

Autre méthode : enfin, on pourrait aussi redémontrer la bornitude en passant par l'inégalité de Hölder et le théorème de Fubini.

2) a) Posons $w_s(t) = \frac{1}{\Gamma(s)} t^{s-1}$, pour $t \in]0,1]$. Comme $s > 0$, remarquons que $\Gamma(s)$ est bien défini et strictement positif (la fonction $t \longmapsto t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$). De plus, comme $s > 0$, la fonction $t \longmapsto t^{s-1}$ est intégrable sur $[0,1]$ et donc $w_s \in L^1(0,1)$. De plus, remarquons que

$$V_s(f) = w_s * f.$$

On peut donc appliquer la question V.1) qui donne que pour toute fonction $f \in L^2(0,1)$, la quantité $V_s(f)(x)$ est bien définie pour presque tout $x \in [0,1]$. De plus, $V_s(f) \in L^2(0,1)$ et

$$\|V_s(f)\|_{L^2(0,1)} = \|w_s * f\|_{L^2(0,1)} \leqslant \|w_s\|_{L^1(0,1)} \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Ceci prouve que l'application linéaire V_s est continue de $L^2(0,1)$ dans lui-même et

$$\|V_s\| \leqslant \|w_s\|_{L^1(0,1)}.$$

Or on a

$$\|w_s\|_{L^1(0,1)} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 t^{s-1} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{s\Gamma(s)} \left[t^s\right]_0^1 = \frac{1}{s\Gamma(s)}$$

car $s > 0$. Or $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ (d'après la question II.1.b), et donc on obtient que

$$\|V_s\| \leqslant \frac{1}{\Gamma(s+1)}.$$

b) On a

$$V_s(p_n)(x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^x (x-t)^{s-1} t^n \, \mathrm{d}t.$$

Effectuons le changement de variable $t = xu$ (où x est fixé dans $]0,1]$). On a alors

$$V_s(p_n)(x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 (x-ux)^{s-1} u^n x^n x \, \mathrm{d}u = \frac{x^{s+n}}{\Gamma(s)} \int_0^1 (1-u)^{s-1} u^n \, \mathrm{d}u.$$

Or d'après la question II.2.b.(ii), on a

$$\int_0^1 (1-u)^{s-1} u^n \, \mathrm{d}u = B(n+1,s) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(s)}{\Gamma(n+1+s)}.$$

En utilisant que $\Gamma(n+1) = n!$ (question II.1.c)), on en déduit que

$$V_s(p_n)(x) = \frac{n!}{\Gamma(n+1+s)} x^{n+s} = \frac{n!}{\Gamma(n+1+s)} p_{n+s}(x).$$

c) En utilisant la question V.2.b) et l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}\|V_s(p_n) - p_n\|_2 &= \left\| \frac{n!}{\Gamma(n+1+s)} p_{n+s} - p_n \right\|_2 \\ &\leqslant \frac{n!}{\Gamma(n+1+s)} \|p_{n+s} - p_n\|_2 + \left| \frac{n!}{\Gamma(n+1+s)} - 1 \right| \|p_n\|_2.\end{aligned}$$

D'une part, pour le second terme, par continuité de Γ (question II.1.d)), on a

$$\lim_{s \to 0^+} \Gamma(n+1+s) = \Gamma(n+1) = n!,$$

ce qui implique que

$$\lim_{s \to 0^+} \left| \frac{n!}{\Gamma(n+1+s)} - 1 \right| \|p_n\|_2 = 0.$$

D'autre part, par un calcul élémentaire :

$$\|p_{n+s} - p_n\|_2^2 = \int_0^1 |t^{n+s} - t^n|^2 \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 |t^s - 1|^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2s+1} - \frac{2}{s+1} + 1,$$

ce qui donne immédiatement que

$$\lim_{s \to 0^+} \|p_{n+s} - p_n\|_2 = 0.$$

On en déduit alors que $\lim_{s \to 0^+} \|V_s(p_n) - p_n\|_2 = 0$.

Autre méthode : on pouvait aussi utiliser le théorème de convergence dominée (nous ne le détaillons pas ici).

d) Remarquons d'abord que les polynômes sont denses dans $L^2(0,1)$. En effet, si $f \in L^2(0,1)$ et $\varepsilon > 0$, alors, comme les fonctions continues sur $[0,1]$ sont denses dans $L^2(0,1)$, il existe $g \in C([0,1])$ telle que $\|f - g\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Le théorème de Weierstrass implique alors qu'il existe un polynôme p tel que $\|g - p\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Ainsi $\|g - p\|_2 \leqslant \|g - p\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot$
L'inégalité triangulaire permet alors d'écrire

$$\|f - p\|_2 \leqslant \|f - g\|_2 + \|g - p\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci prouve donc que les polynômes sont denses dans $L^2(0,1)$.
D'autre part, si p est un polynôme, on peut écrire $p = \sum_{n=0}^N a_n p_n$ et donc, par linéarité de V_s, on a

$$\|V_s(p) - p\|_2 = \left\| \sum_{n=0}^N a_n (V_s(p_n) - p_n) \right\|_2 \leqslant \sum_{n=0}^N |a_n| \|V_s(p_n) - p_n\|_2,$$

et la question V.2.c) implique que $\lim_{s \to 0^+} \|V_s(p) - p\|_2 = 0$.
Maintenant, si $f \in L^2(0,1)$ et $\varepsilon > 0$. Par densité des polynômes dans $L^2(0,1)$, on peut trouver un polynôme p tel que $\|f - p\|_2 \leqslant \varepsilon$. On écrit alors

$$\|V_s(f) - f\|_2 \leqslant \|V_s(f) - V_s(p)\|_2 + \|V_s(p) - p\|_2 + \|p - f\|_2 \leqslant (\|V_s\| + 1)\|f - p\|_2 + \|V_s(p) - p\|_2.$$

En utilisant la question V.2.a), on en déduit que

$$\|V_s(f) - f\|_2 \leqslant \left(\frac{1}{\Gamma(s+1)} + 1 \right) \varepsilon + \|V_s(p) - p\|_2.$$

En utilisant que $\lim_{s\to 0^+} \|V_s(p)-p\|_2 = 0$ et le fait que $\lim_{s\to 0^+} \Gamma(s+1) = \Gamma(1) = 1$, on obtient que

$$\limsup_{s\to 0^+} \|V_s(f)-f\|_2 \leqslant 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\limsup_{s\to 0^+} \|V_s(f)-f\|_2 = 0$ et donc finalement que $\lim_{s\to 0^+} \|V_s(f)-f\|_2 = 0$

e) Soient $s_1, s_2 > 0$ et $f \in L^2(0,1)$. On a, pour presque $x \in [0,1]$,

$$(V_{s_1}\circ V_{s_2})(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)} \int_0^x (x-u)^{s_1-1}\left(\int_0^u f(t)(u-t)^{s_2-1}\,\mathrm{d}t\right) du.$$

En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, remarquons que

$$\int_0^x \int_0^u |f(t)||x-u|^{s_1-1}|u-t|^{s_2-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u = \int_0^x |f(t)| \left(\int_t^x (x-u)^{s_1-1}(u-t)^{s_2-1}\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}t.$$

En utilisant le changement de variable $u = (1-\lambda)t + \lambda x$, on obtient que

$$\begin{aligned}\int_t^x (x-u)^{s_1-1}(u-t)^{s_2-1}\,du =& (x-t)^{s_1+s-2+1}\int_0^1 (1-\lambda)^{s_1-1}\lambda^{s_2-1}\,d\lambda \\ =& (x-t)^{s_1+s_2-1}B(s_1,s_2).\end{aligned} \tag{3.22}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^x \int_0^u |f(t)||x-u|^{s_1-1}|u-t|^{s_2-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u &= B(s_1,s_2)\int_0^x |f(t)|(x-t)^{s_1+s_2-1}\,\mathrm{d}t \\ &= B(s_1,s_2)\Gamma(s_1+s_2)V_{s_1+s_2}(|f|)(x).\end{aligned}$$

Ceci prouve donc que pour presque tout $x \in [0,1]$,

$$\int_0^x \int_0^u |f(t)||x-u|^{s_1-1}|u-t|^{s_2-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u < +\infty.$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini et on obtient que, pour presque tout $x \in [0,1]$, on a

$$(V_{s_1}\circ V_{s_2})(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)} \int_0^x f(t)\left(\int_t^x (x-u)^{s_1-1}(u-t)^{s_2-1}\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}t.$$

En réutilisant (3.22), on en déduit que

$$(V_{s_1}\circ V_{s_2})(f)(x) = \frac{B(s_1,s_2)}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)} \int_0^x f(t)(x-t)^{s_1+s_2-1}\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant la question II.2.b., on conclut que

$$(V_{s_1}\circ V_{s_2})(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(s_1+s_2)} \int_0^x f(t)(x-t)^{s_1+s_2-1}\,\mathrm{d}t = V_{s_1+s_2}(f)(x).$$

Ceci étant vrai pour presque tout $x \in [0,1]$, on en déduit que $(V_{s_1}\circ V_{s_2})(f) = V_{s_1+s_2}(f)$ dans $L^2(0,1)$, et finalement comme cette égalité est satisfaite pour toute $f \in L^2(0,1)$, on peut affirmer que $V_{s_1}\circ V_{s_2} = V_{s_1+s_2}$.

Autre méthode : en reprenant le 2.b., on a en fait $V_s(p_\alpha) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1+s)} p_{\alpha+s}$ pour tout $\alpha \geqslant 0$ (et pas seulement pour α entier) si bien que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}(V_{s_1} \circ V_{s_2})(p_n) &= \frac{n!}{\Gamma(n+1+s_2)} V_{s_1}(p_{n+s_2}) = \frac{n!}{\Gamma(n+1+s_2)} \frac{\Gamma(n+s_2+1)}{\Gamma(n+1+s_1+s_2)} p_{n+s_1+s_2} \\ &= V_{s_1+s_2}(p_n) .\end{aligned}$$

Ainsi, par linéarité, on a $V_{s_1} \circ V_{s_2} = V_{s_1+s_2}$ sur l'espace vectoriel engendré par les p_n et donc leur fermeture dans $L^2(0,1)$ par continuité ; autrement dit on a égalité sur $L^2(0,1)$ puisque les polynômes y sont denses.

3) a) On va utiliser un procédé d'extraction diagonale. Commençons par utiliser le fait que T_0 est compacte. Ainsi il existe une application strictement croissante $\varphi_0 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que la suite $(T_0(x_{\varphi_0(n)}))_{n\geqslant 0}$ converge dans H. Par récurrence, pour tout $j \geqslant 0$, on construit une application strictement croissante $\varphi_j : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que la suite $(T_j(x_{(\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_j)(n)}))_{n\geqslant 0}$ converge dans H. On pose alors $\varphi(n) = (\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n)(n)$.
L'application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante. En effet, on a

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) = (\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n)(\varphi_{n+1}(n+1)) - (\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n)(n),$$

et l'application φ_{n+1} étant strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même, on a $\varphi_{n+1}(n+1) \geqslant n+1$ et comme la composée d'applications strictement croissante est strictement croissante, on a

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) \geqslant (\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n)(n+1) - (\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n)(n) > 0.$$

De plus, si $j \in \mathbb{N}$, la suite $(T_j(x_{\varphi(n)}))_{n\geqslant j}$ est une sous-suite de la suite $(T_j(x_{(\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_j)(n)}))_{n\geqslant 0}$ qui converge dans H. Donc la suite $(T_j(x_{\varphi(n)}))_{n\geqslant 0}$ converge dans H.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \|T_k - T\| = 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|T_{k_0} - T\| \leqslant \varepsilon$. D'autre part, d'après la question précédente, la suite $(T_{k_0}(x_{\varphi(n)}))_{n\geqslant 0}$ converge dans H et donc en particulier, est une suite de Cauchy. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n, m \geqslant N \Longrightarrow \|T_{k_0}(x_{\varphi(n)}) - T_{k_0}(x_{\varphi(m)})\|_H \leqslant \varepsilon.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit donc que pour tout $n, m \geqslant N$, on a

$$\begin{aligned}\|T(x_{\varphi(n)}) - T(x_{\varphi(m)})\|_H &\leqslant \|(T - T_{k_0})(x_{\varphi(n)})\|_H + \|T_{k_0}(x_{\varphi(n)}) - T_{k_0}(x_{\varphi(m)})\|_H + \\ &\quad + \|(T - T_{k_0})(x_{\varphi(m)})\|_H \\ &\leqslant 2\|T - T_{k_0}\| + \|T_{k_0}(x_{\varphi(n)}) - T_{k_0}(x_{\varphi(m)})\|_H \\ &\leqslant 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi la suite $(T(x_\varphi(n))_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy dans H et donc converge (par complétude de l'espace de Hilbert H). On peut donc en conclure que $T(B_H)$ est relativement compacte, où B_H est la boule unité fermée de H. Ainsi, l'application T est compacte.

4) a) Comme $p_j \in L^2(0,1)$, on a $K_n(f) \in L^2(0,1)$ (car $L^2(0,1)$ est un espace vectoriel). Par linéarité de l'intégrale, l'application K_n est bien linéaire de $L^2(0,1)$ dans $L^2(0,1)$. De plus, on a

$$\|K_n(f)\|_2 \leqslant \sum_{j=0}^{d_n} \|p_j\|_2 \int_0^1 |f(u)||P_{j,n}(u)|\,\mathrm{d}u.$$

Or $\|p_j\|_2 \leqslant 1$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\int_0^1 |f(u)||P_{j,n}(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant \|f\|_2 \|P_{j,n}\|_2.$$

D'où
$$\|K_n(f)\|_2 \leqslant C_n \|f\|_2,$$
avec $C_n = \sum_{j=0}^{d_n} \|P_{j,n}\|_2 < +\infty$. Ceci montre que K_n est continue de $L^2(0,1)$ dans lui-même.
Il reste à remarquer que l'image de K_n est contenue dans $F := \mathrm{Vect}\,\{p_j : 0 \leqslant j \leqslant d_n\}$, qui est de dimension finie. On conclut que K_n est de rang fini donc compacte : pour détailler, pour toute suite bornée $(f_k)_k$ de la boule unité fermée de $L^2(0,1)$, la suite $\big(K_n(f_k)\big)_k$ est bornée, dans $F \subset L^2(0,1)$, de dimension finie, donc il existe une sous-suite convergente.

b) Pour $f \in L^2(0,1)$, pour presque tout $x \in [0,1]$, remarquons qu'on a
$$V_s(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^x f(u)(x-u)^{s-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)\psi_s(x-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 f(u)\psi_s(x-u)\,\mathrm{d}u,$$
car $\psi_s(x-u) = 0$ si $x < u < 1$. De plus,
$$\begin{aligned} K_n(f)(x) &= \sum_{j=0}^{d_n} \left(\int_0^1 f(u)P_{j,n}(u)\,\mathrm{d}u \right) x^j \\ &= \int_0^1 f(u) \sum_{j=0}^{d_n} P_{j,n}(u)x^j\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 f(u)Q_n(x-u)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$
D'où
$$\begin{aligned} (V_s(f) - K_n(f))(x) &= \int_0^1 (\psi_s - Q_n)(x-u)f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{x-1}^x (\psi_s - Q_n)(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^1 (\psi_s - Q_n)(t)F(x,t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$
où F est définie sur $[0,1] \times [-1,1]$ par
$$F(x,t) = \begin{cases} f(x-t) & \text{si } x-1 \leqslant t \leqslant x \quad (\text{ce qui est équivalent à } 0 \leqslant x-t \leqslant 1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
On en déduit alors par l'inégalité triangulaire intégrale :
$$\|V_s(f) - K_n(f)\|_{L^2(0,1)} \leqslant \int_{-1}^1 |\psi_s - Q_n)(t)| \left(\int_0^1 |F(x,t)|^2\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t$$
mais
$$\int_0^1 |F(x,t)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{[0,1]\bigcap[t,t+1]} |f(x-t)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{[0,1]\bigcap[-t,1-t]} |f(u)|^2\,\mathrm{d}u \leqslant \|f\|^2_{L^2(0,1)},$$
ce qui donne que
$$\|V_s(f) - K_n(f)\|_{L^2(0,1)} \leqslant \|\psi_s - Q_n\|_{L^1(-1,1)} \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Autre méthode (à la main) : On écrit

$$\|V_s(f) - K_n(f)\|_2^2 \leqslant \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 |(\psi_s - Q_n)(t)||F(x,t)| \,\mathrm{d}t \right)^2 \mathrm{d}x.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient que

$$\begin{aligned}
\|V_s(f) - K_n(f)\|_2^2 &\leqslant \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 |(\psi_s - Q_n)(t)| \,\mathrm{d}t \right) \left(\int_{-1}^1 |(\psi_s - Q_n)(t)||F(x,t)|^2 \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \\
&= \|\psi_s - Q_n\|_{L^1(-1,1)} \int_{-1}^1 |(\psi_s - Q_n)(t)| \left(\int_0^1 |F(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\
&\leqslant \|\psi_s - Q_n\|_{L^1(-1,1)}^2 \|f\|_{L^2(0,1)}^2
\end{aligned}$$

en reprenant l'explication précédente sur le calcul de l'intégrale de F. On obtient alors de même que

$$\|V_s(f) - K_n(f)\|_{L^2(0,1)} \leqslant \|\psi_s - Q_n\|_{L^1(-1,1)} \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

c) Comme dans la question V.2.d., on montre que les polynômes sont denses $L^1(-1,1)$ (on utilise le théorème de Weierstrass, la densité des fonctions continues sur $[-1,1]$ dans $L^1(-1,1)$ et le fait qu'on ait $\|g\|_{L^1(-1,1)} \leqslant 2\sup_{[-1,1]} |g|$ pour toute fonction continue g sur $[-1,1]$).
Or, la fonction ψ_s est dans $L^1(-1,1)$: en effet, ψ_s est continue sur $[-1,1]\backslash\{0\}$ et $u \longmapsto u^{s-1}$ est intégrable au voisinage de 0 car $s > 0$ (intégrale de Riemann). Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une suite de polynômes (Q_n) de degré d_n et un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, on ait $\|\psi_s - Q_n\|_{L^1(-1,1)} \leqslant \varepsilon$. D'après la question V.4.b), pour toute fonction $f \in L^2(0,1)$, on a alors

$$\|V_s(f) - K_n(f)\|_2 \leqslant \varepsilon \|f\|_2,$$

ce qui implique que $\|V_s - K_n\| \leqslant \varepsilon$. Autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} \|V_s - K_n\| = 0.$$

Mais d'après la question V.4.a, K_n est une application linéaire compacte de $L^2(0,1)$ dans lui même. La question V.3.b) implique alors que V_s est une application linéaire compacte de $L^2(0,1)$ dans $L^2(0,1)$.

Partie VI : Opérateurs de Hilbert-Schmidt

1) S'il existe une base hilbertienne $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ de H telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|T(\gamma_n)\|_H^2 < +\infty$, alors T est Hilbert-Schmidt par définition.
Réciproquement, supposons que T soit Hilbert-Schmidt, c'est à dire qu'il existe une base $(b_k)_{k\geqslant 0}$ de H telle que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|T(b_k)\|_H^2 < +\infty,$$

et soit $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ une autre base hilbertienne de H. Par la formule de Parseval (appliquée avec la base hilbertienne $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|T(b_k)\|_H^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle T(b_k), \gamma_n \rangle_H|^2.$$

Or $|\langle T(b_k), \gamma_n\rangle_H| = |\langle b_k, T^*(\gamma_n)\rangle_H| = |\langle T^*(\gamma_n), b_k\rangle_H|$, d'où

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|T(b_k)\|_H^2 = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle T^*(\gamma_n), b_k\rangle_H|^2.$$

Le théorème de Fubini-Tonelli (version discrète) implique alors que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|T(b_k)\|_H^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} |\langle T^*(\gamma_n), b_k\rangle_H|^2,$$

et en appliquant une nouvelle fois la formule de Parseval (mais avec la base hilbertienne $(b_k)_{k\geqslant 0}$), on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|T(b_k)\|_H^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|T^*(\gamma_n)\|_H^2.$$

D'une part, on en déduit que T^* est aussi Hilbert-Schmidt. D'autre part, comme l'égalité précédente est vraie en fait pour tout couple de bases hilbertiennes, on a aussi que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|T^*(\gamma_n)\|_H^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|T(\gamma_k)\|_H^2$$

et donc, on en déduit finalement que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|T(\gamma_k)\|_H^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|T(b_k)\|_H^2 < +\infty.$$

Autre méthode : on peut aussi invoquer que $T^{**} = T$ pour conclure.

2) a) Comme $(b_k)_{k\geqslant 0}$ est une base hilbertienne de H, pour tout $x \in H$, on a

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle x, b_k\rangle_H\, b_k,$$

où la série converge (en norme) dans H. D'autre part, $(b_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ étant une base orthonormale de F_n et on a

$$P_{F_n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \langle x, b_k\rangle_H b_k.$$

Ainsi

$$x - P_{F_n}x = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \langle x, b_k\rangle_H b_k.$$

La linéarité et la continuité de T implique que

$$T(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \langle x, b_k\rangle_H T(b_k).$$

Avec l'inégalité triangulaire puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que

$$\|(T-S_n)(x)\|_H \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\langle x, b_k\rangle_H| \|T(b_k)\|_H \leqslant \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |\langle x, b_k\rangle_H|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|T(b_k)\|^2\right)^{1/2}.$$

L'inégalité de Bessel (ou via Parseval) implique alors que

$$\|(T-S_n)(x)\|_H \leqslant \|x\|_H \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|T(b_k)\|^2\right)^{1/2},$$

ce qui entraine que

$$\|T-S_n\| \leqslant \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|T(b_k)\|_H^2\right)^{1/2}.$$

b) Comme la série $\sum_k \|T(b_k)\|_H^2$ converge, on sait que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|T(b_k)\|_H^2 = 0$, ainsi par la question VI.2.a), on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \|T-S_n\| = 0.$$

Remarquons alors que l'image de S_n est contenue dans le sous-espace vectoriel engendré par les $T(b_k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, donc de dimension finie. Ainsi S_n est compact car de rang fini (même raisonnement que dans la question V.4.a)). La question V.3.b) permet alors d'en déduire que T est aussi compacte.

3) a) On a

$$\begin{aligned}\langle V_s(\mathrm{e}_n), \mathrm{e}_n\rangle_2 &= \int_0^1 V_s(\mathrm{e}_n)(x)\mathrm{e}^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-2i\pi n(x-t)}(x-t)^{s-1}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or avec le changement de variable $u = x-t$, on a

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-2i\pi n(x-t)}(x-t)^{s-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-2i\pi nu}u^{s-1}\,\mathrm{d}u,$$

ce qui donne

$$\langle V_s(\mathrm{e}_n), \mathrm{e}_n\rangle_2 = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-2i\pi nu}u^{s-1}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$

Comme $|\mathrm{e}^{-2i\pi nu}u^{s-1}| = u^{s-1}$ et $s>0$, il est facile de voir qu'on peut utiliser le théorème de Fubini, ce qui donne

$$\begin{aligned}\langle V_s(\mathrm{e}_n), \mathrm{e}_n\rangle_2 &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \mathrm{e}^{-2i\pi nu}u^{s-1}\left(\int_u^1 \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \mathrm{e}^{-2i\pi nu}u^{s-1}(1-u)\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\left(I_n(s-1)-I_n(s)\right).\end{aligned}$$

Soit $s\in]0,1[$. Alors $s-1\in]-1,0[$, et en utilisant les questions II.3.b) et II.3.e), on a

$$I_n(s) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad I_n(s-1) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi n)^s}\mathrm{e}^{-\frac{i\pi s}{2}} + o\left(\frac{1}{n^s}\right).$$

Ainsi, on en déduit que

$$\langle V_s(\mathrm{e}_n), \mathrm{e}_n\rangle_2 = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{i\pi s}{2}}}{(2\pi n)^s} + o\left(\frac{1}{n^s}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or, comme $s \in]0,1[$, le terme $O\left(\frac{1}{n}\right)$ est $o\left(\frac{1}{n^s}\right)$, d'où

$$\langle V_s(\mathrm{e}_n), \mathrm{e}_n \rangle_2 = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{i\pi s}{2}}}{(2\pi n)^s} + o\left(\frac{1}{n^s}\right),$$

ce qui donne l'équivalent suivant

$$\langle V_s(\mathrm{e}_n), \mathrm{e}_n \rangle_2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{i\pi s}{2}}}{(2\pi n)^s}.$$

b) Supposons que V_s soit Hilbert-Schmidt sur $L^2(0,1)$. Alors, comme $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(0,1)$, on a, d'après la question VI.1),

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|V_s(\mathrm{e}_n)\|_2^2 < +\infty.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle V_s(\mathrm{e}_n), \mathrm{e}_n \rangle_2|^2 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|V_s(\mathrm{e}_n)\|_2^2 < +\infty.$$

Or d'après la question VI.3.b), on a $|\langle V_s(\mathrm{e}_n), \mathrm{e}_n \rangle_2| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi n)^s}$. Ainsi, cela implique que la série

$$\sum_n \frac{1}{n^{2s}}$$

converge et donc nécessairement $2s > 1$, c'est-à-dire $s > 1/2$.

4) L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$\int_0^1 |K(x,y)||f(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \left(\int_0^1 |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |f(y)|^2\,\mathrm{d}y\right)^{1/2} = \|f\|_2 \left(\int_0^1 |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\right)^{1/2}.$$

Or par le théorème de Fubini-Tonelli

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \|K\|^2_{L^2([0,1]\times[0,1]} < \infty,$$

et donc pour presque tout $x \in [0,1]$, on a

$$\int_0^1 |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y < +\infty. \tag{3.23}$$

En particulier, $T_K(f)(x)$ est bien définie pour presque tout $x \in [0,1]$, et on a

$$|T_K(f)(x)|^2 \leqslant \|f\|_2^2 \int_0^1 |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y.$$

En intégrant par rapport à x, on obtient que

$$\int_0^1 |T_K(f)(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_2^2 \|K\|^2_{L^2([0,1]\times[0,1]}.$$

Donc $T_K(f) \in L^2(0,1)$ et on a $\|T_K(f)\|_2 \leqslant \|K\|_{L^2([0,1]\times[0,1]}\|f\|_2$. Ceci prouve que l'application linéaire T_K est continue de $L^2(0,1)$ dans $L^2(0,1)$ et

$$\|T_K\| \leqslant \|K\|_{L^2([0,1]\times[0,1]}.$$

Montrons maintenant que T_K est Hilbert-Schmidt. Pour cela, fixons $(b_n)_{n\geqslant 0}$ une base hilbertienne de $L^2(0,1)$ et notons pour presque tout $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$, $K_x(y)=K(x,y)$. L'inégalité (3.23) implique que pour presque tout $x\in[0,1]$, $K_x\in L^2(0,1)$ et on a

$$T_K(f)(x)=\langle K_x,f\rangle_2.$$

D'où
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\|T_K(b_n)\|_2^2=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1|T_K(b_n)(x)|^2\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1|\langle K_x,b_n\rangle_2|^2\,\mathrm{d}x.$$
En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\|T_K(b_n)\|_2^2=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}|\langle K_x,b_n\rangle_2|^2\,\mathrm{d}x.$$

Or par la formule de Parseval appliquée à $K_x\in L^2(0,1)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|\langle K_x,b_n\rangle_2|^2=\|K_x\|_2^2,$$

ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\|T_K(b_n)\|_2^2=\int_0^1\|K_x\|_2^2\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\int_0^1|K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\|K\|^2_{L^2([0,1]\times[0,1])}<+\infty.$$

On en déduit que T_K est Hilbert-Schmidt.

5) D'après la question VI.3.b), si V_s est Hilbert-Schmidt, alors $s>1/2$.
Réciproquement, supposons que $s>1/2$. On voit que $V_s=T_{K_s}$ avec

$$K_s(x,y)=\frac{1}{\Gamma(s)}\mathbb{1}_{[0,x[}(y)(x-y)^{s-1},\qquad \text{où } (x,y)\in[0,1]\times[0,1].$$

En utilisant que $2s-1>0$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_0^1|K_s(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x&=\frac{1}{\Gamma(s)^2}\int_0^1\left(\int_0^x(x-y)^{2s-2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\Gamma(s)^2}\int_0^1\left[-\frac{(x-y)^{2s-1}}{2s-1}\right]_0^x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\Gamma(s)^2}\int_0^1\frac{x^{2s-1}}{2s-1}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2s(2s-1)\Gamma(s)^2}<+\infty.\end{aligned}$$

Ainsi, $K_s\in L^2([0,1]\times[0,1])$ et la question VI.4) implique que $V_s=T_{K_s}$ est Hilbert-Schmidt.

6) Supposons que V_s s'écrit comme une série absolument convergente d'applications linéaires continues de $L^2(0,1)$ dans $L^2(0,1)$ de rang 1. Il est clair que toute application linéaire continue de rang 1 sur $L^2(0,1)$ s'écrit comme $(x\otimes y)(h):=\langle h,y\rangle_2\,x$ avec $x,y,h\in L^2(0,1)$. De plus, il n'est pas difficile de voir que $\|x\otimes y\|=\|x\|_2\|y\|_2$. L'hypothèse implique donc qu'il existe deux suites $(x_k)_{k\geqslant 0}$ et $(y_k)_{k\geqslant 0}$ de $L^2(0,1)$ telle que

$$V_s=\sum_{k=0}^{+\infty}x_k\otimes y_k,\quad\text{avec }\sum_{k=0}^{+\infty}\|x_k\|_2\|y_k\|_2<+\infty.$$

Remarquons alors que

$$\langle V_s(\mathrm{e}_n), \mathrm{e}_n\rangle_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle \mathrm{e}_n, y_k\rangle_2 \langle x_k, \mathrm{e}_n\rangle_2,$$

d'où, avec l'inégalité triangulaire et le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle V_s(\mathrm{e}_n), \mathrm{e}_n\rangle_2| &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} |\langle \mathrm{e}_n, y_k\rangle_2||\langle x_k, \mathrm{e}_n\rangle_2| \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle \mathrm{e}_n, y_k\rangle_2||\langle x_k, \mathrm{e}_n\rangle_2|.\end{aligned}$$

Or avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis l'inégalité de Parseval, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle \mathrm{e}_n, y_k\rangle_2||\langle x_k, \mathrm{e}_n\rangle_2| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle \mathrm{e}_n, y_k\rangle_2|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x_k, \mathrm{e}_n\rangle_2|^2\right)^{1/2} \leqslant \|x_k\|_2\|y_k\|_2.$$

On en déduit finalement que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle V_s(\mathrm{e}_n), \mathrm{e}_n\rangle_2| < +\infty. \tag{3.24}$$

Maintenant, supposons par l'absurde que $0 < s \leqslant 1$. Si $0 < s < 1$, d'après la question VI.3.a), on a

$$|\langle V_s(\mathrm{e}_n), \mathrm{e}_n\rangle_2| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi n)^s}$$

ce qui implique que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ converge, ce qui est absurde. On obtient également une contradiction dans le cas où $s = 1$, car un calcul élémentaire montre que $V_1(\mathrm{e}_n) = \frac{1}{2i\pi n}\mathrm{e}_n$ et donc

$$\langle V_1(\mathrm{e}_n), \mathrm{e}_n\rangle_2 = \frac{1}{2i\pi n},$$

ce qui donne également une contradiction avec (3.24). Ainsi, si V_s s'écrit comme une série absolument convergente d'applications linéaires continues de $L^2(0,1)$ dans $L^2(0,1)$ de rang 1, alors nécessairement $s > 1$.

Réciproquement, supposons que $s > 1$. Comme $\frac{s}{2} > \frac{1}{2}$, la question VI.5) implique que $V_{\frac{s}{2}}$ est Hilbert-Schmidt. D'après la question V.2.e), on a aussi que $V_{\frac{s}{2}} \circ V_{\frac{s}{2}} = V_s$. En utilisant que $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(0,1)$, on a, pour tout $f \in L^2(0,1)$,

$$V_{\frac{s}{2}}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle V_{\frac{s}{2}}(f), \mathrm{e}_n\rangle_2\, \mathrm{e}_n,$$

d'où par linéarité et continuité de $V_{\frac{s}{2}}$,

$$\begin{aligned}V_s(f) = V_{\frac{s}{2}}\big(V_{\frac{s}{2}}(f)\big) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle V_{\frac{s}{2}}(f), \mathrm{e}_n\rangle_2 V_{\frac{s}{2}}(\mathrm{e}_n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, V^*_{\frac{s}{2}}(\mathrm{e}_n)\rangle_2 V_{\frac{s}{2}}(\mathrm{e}_n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (V_{\frac{s}{2}}(\mathrm{e}_n) \otimes V^*_{\frac{s}{2}}(\mathrm{e}_n))(f).\end{aligned}$$

De plus, remarquons qu'avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la question VI.1), on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|V_{\frac{s}{2}}(\mathrm{e}_n)\otimes V_{\frac{s}{2}}^*(\mathrm{e}_n)\| &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|V_{\frac{s}{2}}(\mathrm{e}_n)\|\|V_{\frac{s}{2}}^*(\mathrm{e}_n)\| \\ &\leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|V_{\frac{s}{2}}(\mathrm{e}_n)\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|V_{\frac{s}{2}}^*(\mathrm{e}_n)\|^2\right)^{1/2} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|V_{\frac{s}{2}}(\mathrm{e}_n)\|^2,\end{aligned}$$

quantité finie car $V_{\frac{s}{2}}$ est Hilbert-Schmidt. Ainsi, on en déduit que

$$V_s = \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{\frac{s}{2}}(\mathrm{e}_n)\otimes V_{\frac{s}{2}}^*(\mathrm{e}_n),$$

où la série est absolument convergente.

Chapitre 4

Épreuves orales de leçons

4.1 Liste des leçons

La liste des leçons pour la session 2026 est identique à celle de la session 2025.

Leçons Algèbre et Géométrie 2026

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

102 Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

103 Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

104 Groupes finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

122 Anneaux principaux. Exemples et applications.

123 Corps finis. Applications.

125 Extensions de corps. Exemples et applications.

127 Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

148 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

149 Déterminant. Exemples et applications.

150 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

151 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

152 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

153 Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

155 Exponentielle de matrices. Applications.

156 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

157 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

158 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

161 Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

181 Convexité dans $\mathbf{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

191 Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.

Leçons Analyse-Probabilités 2026

201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

203 Utilisation de la notion de compacité.

204 Connexité. Exemples d'applications.

205 Espaces complets. Exemples et applications.

206 Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

209 Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

213 Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

218 Formules de Taylor. Exemples et applications.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

223 Suites réelles et complexes. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels et complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

234 Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

235 Problèmes d'interversion de symboles en analyse

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de **C**. Exemples et applications.

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

250 Transformation de FOURIER. Applications.

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

261 Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

266 Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

4.2 Présentation des épreuves

Modalités. Pour les épreuves de leçons, la candidate ou le candidat tire au sort un couple de sujets, et est libre de choisir le sujet qui lui plaît parmi ces deux sujets proposés, celui qui lui semble le plus à même de mettre en valeur ses connaissances, sans avoir à justifier ou commenter son choix devant le jury.

Les candidates et candidats préparent l'interrogation pendant 3 heures.

Durant tout ce temps, elles ou ils ont libre accès aux livres de la bibliothèque de l'agrégation ou à leurs propres ouvrages. Seuls sont autorisés les ouvrages avec un numéro ISBN et jouissant d'une véritable diffusion commerciale. L'attention des candidates et candidats est attirée sur le fait que l'ISBN ne suffit pas, une « diffusion commerciale avérée »est tout autant importante. Ainsi, un polycopié de cours, propre à un établissement, même muni d'un ISBN, pourra être refusé. Cette restriction est motivée par le principe d'égalité des candidats : les ressources documentaires autorisées doivent être facilement accessibles à tout candidat au concours. Les ouvrages imprimés par les candidats eux-mêmes (ou les bibliothèques universitaires, ou les préparations universitaires) ne sont pas autorisés et les livres doivent être vierges d'annotation. Tous les ouvrages personnels peuvent être interdits, lors de l'oral, sur simple décision du représentant du directoire présent lors de la préparation. Il n'est pas autorisé non plus de venir avec des livres dont certaines pages auraient été marquées au préalable, fût-ce de manière amovible, au moyen de post-it par exemple. (Il est toutefois possible de se munir de tels marque-pages à apposer durant la préparation.) Le représentant du directoire présent lors de la préparation peut interdire tout ouvrage personnel ou envoyé par une préparation universitaire. Les notes personnelles, manuscrites ou dactylographiées, ne sont autorisées ni pendant l'épreuve proprement dite, ni pendant la préparation. Il est possible, et même recommandé, de venir muni d'un exemplaire du rapport du jury de l'agrégation externe de mathématiques, relié et sans annotation. Quelques exemplaires du rapport sont à disposition des candidates et candidats dans chaque salle de préparation.

Les candidates et candidats n'ont pas accès à Internet et la possession d'un dispositif de communication ou de stockage de données (téléphone, calculatrice, clé USB, montre connectée,...) serait considérée comme une tentative de fraude, susceptible d'entraîner l'exclusion du concours.

Les casques de réduction de bruit ne sont pas autorisés, les candidates ou candidats qui désirent s'isoler des bruits peuvent apporter des bouchons d'oreille.

Le temps de préparation est décompté dès l'ouverture des la prise de connaissance des sujets. À l'issue des trois heures de préparation, les plans des leçons sont ramassés pour être photocopiés à l'intention des jurys. Pendant le temps nécessaire à cette reproduction, lescandidates et candidats sont invités à ranger leurs affaires et à prendre quelques minutes de repos.

Les plans sont des documents manuscrits, communiqués à la commission d'interrogation. Ils comportent au maximum 3 pages au format A4, éventuellement complétées d'une page de figures. Les candidats doivent veiller à la lisibilité de leur document, en tenant en compte le fait qu'ils vont être photocopiés : écrire suffisament gros, soigner la présentation, faire apparaître des titres, éviter l'utilisation de couleurs et les encres très claires... Le candidat doit clairement signaler sur ce plan les résultats qu'il estime significatifs, représentatifs de la leçon et qu'il propose de développer devant le jury.

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale de 55 minutes environ : une présentation du plan de la leçon éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions. La candidate ou le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve. Pendant la première phase de l'interrogation consacrée à la présentation du plan, il peut utiliser toutes les notes manuscrites produites durant la préparation. Le développement doit quant à lui se faire sans utiliser ces notes manuscrites ; si le plan comporte lui-même trop de détails sur les développements proposés, le jury peut restreindre l'utilisation de ce document durant cette seconde phase de l'épreuve.

Commentaires généraux. Le jury met en garde contre plusieurs écueils constatés :

— le hors-sujet. Le hors-sujet se manifeste de deux manières, qui dans tous les cas sont lourdement sanctionnées. Quelques candidates ou candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon et s'en écartent notablement : les titres des leçons définissent le champ précis qu'il faut traiter. Par ailleurs, le jury constate l'abus de « recyclage »de thèmes plus ou moins classiques, mais qui ne sont pas exploités avec à propos dans les leçons et qui, parfois, prennent une place sans commune mesure avec leur importance mathématique.

— le manque d'autonomie et de maîtrise du sujet. Probablement dûe à une mauvaise évaluation des attentes et un manque de lucidité, trop de candidates ou candidats proposent plan ou développements qu'ils ne peuvent défendre. Des connaissances des bases fermement maîtrisées et intelligemment utilisées valent mieux qu'un étalage de savoirs emmagasinés sans recul et à peine digérés, voire pas assimilés du tout. Une maîtrise avérée et solide des bases assure déjà une note très convenable, certainement de nature à permettre l'admission, en l'état du concours.

— la fatigue et le stress. Une grande majorité des candidates et candidats se présente avec une forte charge émotionnelle, à la mesure de l'enjeu et de leur investissement personnel, qui peut nuire à l'expression de leurs connaissances. Cela est d'autant plus vrai que l'épreuve ne se réduit pas à la simple récitation d'un cours mais à un échange avec le jury et donc, là encore, à une réflexion personnelle, à une prise de hauteur et à la démonstration, dans un temps court, non seulement de la maîtrise technique mais aussi de l'aptitude à construire un raisonnement. Le jury est pleinement conscient de ces difficultés et s'emploie à en réduire les effets négatifs en mettant en pratique une posture de bienveillance constante. Le jury ne cherche en rien à déstabiliser le candidat pendant l'épreuve, mais au contraire cherche à valoriser les connaissances de la candidate ou du candidat. Les premières questions, parfois très simples, visent souvent à préciser une notation, un point du plan ou du développement, pour que le jury s'assure de la compréhension par le candidat des notions qu'il vient d'exposer et non pour lui tendre un quelconque piège. Les membres du jury font leur possible pour mettre en confiance, respecter, et écouter la candidate ou le candidat, en stimulant le dialogue.

Une liste d'énoncés, quelque sophistiqués qu'ils soient, ne peut suffire à convaincre le jury. Il faut savoir motiver ces énoncés et pouvoir expliquer comment ils s'enchaînent et en quoi ils sont pertinents. Les leçons doivent donc être illustrées avec des exemples judicieusement choisis. De nombreux titres de leçons se terminent d'ailleurs par « exemples et applications » : le jury attend donc que le plan soit riche en exemples et applications et/ou que le candidat puisse en développer lors de la présentation de son plan.

Recommandations. On trouvera ci-dessous des commentaires sur chaque leçon de la session 2025, l'objectif étant d'expliciter les attendus du jury. Ces commentaires proposent volontairement deux niveaux de lecture :

- le premier s'en tient strictement au programme officiel, et n'interdit pas d'obtenir sans le dépasser une très bonne note ;

- le second réservé seulement aux candidates et candidats suffisamment solides pour aborder avec maîtrise des thèmes plus ambitieux.

Le premier niveau correspond aux notions « de base », incontournables pour l'intitulé proposé et dont la maîtrise est attendue des candidats. Le second propose des suggestions d'ouverture. Ces suggestions sont de niveaux variés et peuvent concerner des champs différents, par exemple qui trouvent leurs motivations dans des problématiques propres aux options de modélisation. Certaines pistes se placent aussi aux frontières du programme et peuvent faire écho à des sujets spécialisés abordés durant la formation du candidat. Il ne s'agit là que de propositions qui ne revêtent aucun caractère obligatoire, introduites par des formulations comme « pour aller plus loin »ou « si les candidats le désirent » ; le jury n'attend certainement pas un balayage exhaustif de ces indications et il n'est pas nécessaire de développer les éléments les plus sophistiqués pour obtenir une note élevée. Enfin, certains commentaires font part de l'expérience du jury pour évoquer le dosage pas toujours approprié entre théorie et exemples, souligner des points de faiblesse qui méritent une attention particulière ou mettre en garde contre de possibles écueils (oublis, hors-sujets, erreurs fréquentes, positionnement mal à propos, etc). Le jury espère que candidates et candidats, ainsi que les préparateurs, sauront se saisir de ces indications pour proposer des développements originaux : il n'y a pas de format standard et des manières différentes d'aborder les leçons peuvent toutes permettre d'obtenir d'excellents résultats.

Les leçons proposées ont toutes leurs spécificités qu'un principe unique ne saurait résumer ou englober. Une partie des sujets sont très délimités, alors que certains intitulés de leçons sont très ouverts et obligent la candidate ou le candidat à opérer des choix thématiques et de points de vue. Ces sujets sont pensés pour offrir de multiples points d'entrée, avec une échelle de niveaux techniques assez large, l'objectif étant de permettre à l'ensemble des candidats de s'exprimer au mieux et de mettre en valeur leurs connaissances. La pertinence des choix adoptés et leur motivation au regard de l'intitulé de la leçon entrent alors tout particulièrement dans l'appréciation, ainsi, bien entendu, que la maîtrise du contenu proposé. Ces leçons de synthèse exigent certainement un important recul ; elles réclament un effort conséquent de réflexion et méritent tout particulièrement d'être préparées en amont du concours. En retour, elles permettent de consolider un matériel mathématique qui peut être réinvesti avec profit dans d'autres thèmes.

Lorsque la leçon s'y prête, le jury recommande très fortement qu'un des développements démontre l'un des résultats centraux ou un enchaînement de résultats centraux de la leçon. Les prérequis du développement devront (ou doivent) alors être clairement précisés."

4.2.1 Première partie : présentation de la leçon

Dans cette première phase de l'épreuve, la candidate ou le candidat est convié à utiliser son temps de parole, 6 minutes maximum, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de sa leçon.

Pour cette partie de l'épreuve, la candidate ou le candidat devrait s'imaginer dans la situation où il doit introduire à un auditoire, pendant 6 minutes, une leçon destinée ensuite à être développée sur plusieurs séances. Quel est l'intérêt du sujet ? Comment se positionne-t-il dans un paysage mathématique plus large ? Comment s'articulent les différentes sections qui composent la leçon ? Comment s'expliquent et se motivent les enchaînements ? Comment se hiérarchisent les résultats et les difficultés ? Il s'agit aussi de s'interroger sur les enjeux didactiques de la leçon, c'est-à-dire dans quel ordre et comment présenter les choses pour que le tout soit cohérent, compréhensible et pédagogiquement efficace. De plus, cette présentation gagne à être illustrée. Des exemples peuvent être utilisés pour mettre en évidence les difficultés, faire ressortir le rôle des hypothèses et décrire des applications met en valeur l'intérêt des résultats. Enfin, des figures peuvent aussi contribuer à expliquer les idées maîtresses. Si l'enjeu principal est d'argumenter la construction du plan de la leçon, il est aussi parfois pertinent de mettre en valeur les liens logiques et l'intérêt des notions présentées dans d'autres domaines (sans forcément les introduire dans le plan écrit).

Le rapport du concours indique des pistes pour chaque leçon ; il ne s'agit que de suggestions que le candidat n'est pas tenu de suivre et qui ne constituent pas une trame obligatoire pour le plan. Notamment le rapport distingue clairement le cœur des leçons et des extensions dont le contenu peut être techniquement plus exigeant. La vocation de ces commentaires n'est donc pas d'être repris de manière exhaustive ; il ne s'agit que de guider les candidats dans leur auto-évaluation et les encourager à présenter des notions avec lesquelles ils sont à l'aise. Notamment, ils peuvent tout à fait exploiter des notions ou des applications qui trouvent leur motivation dans les options de modélisation qu'ils ont choisies.

Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que le plan soit bien structuré, maîtrisé par la candidate ou le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples et de mathématique. Le jury attend que la candidate ou le candidat fasse preuve d'un investissement personnel sur le sujet et qu'il explique pourquoi il adopte cette présentation. Le jury s'émeut du nombre important de candidates et candidats qui utilisent un plan *tout fait* disponible dans la littérature et se trouvent ensuite, faute de regard critique et d'appropriation suffisante, en difficulté de pouvoir l'expliquer, le commenter et le défendre. Le jury cherche aussi à vérifier la capacité à penser par soi-même et à réfléchir de manière autonome. Face à ce qui peut ressembler à une dérive, les livres contenant des plans rédigés sont interdits depuis le concours 2023. Le jury invite les candidates et candidats, durant leur année de préparation, à ne pas craindre de faire preuve de curiosité et de diversifier leurs lectures, afin de produire des plans à la fois plus synthétiques et plus hiérachisés, proposant des résultats et des exemples réellement maîtrisés et analysés.

Le jury se désole par ailleurs du très petit nombre de candidates et candidats qui ont le réflexe de faire un dessin, lorsque c'est pertinent, notamment durant le développement. C'est pourtant un moyen extrêmement efficace pour faire saisir l'idée d'une preuve ou motiver une méthode.

Il s'agit d'une épreuve orale. Le document écrit transmis au jury se justifie pour servir de base pour la discussion et constitue un fil conducteur qui guide le jury pour mener la partie consacrée au dialogue et aux questions. Ce plan ne doit être ni une énumération d'énoncés, ni un cours ou un exposé complet avec développement des démonstrations. En revanche, il doit définir avec suffisamment de précision les notions mathématiques introduites, donner les énoncés complets (notamment les hypothèses) des résultats fondamentaux, citer des exemples et des applications. Le plan est important puisqu'il calibre l'ensemble de la leçon, il détermine l'orientation et le niveau choisis par le candidat. Les choix doivent être motivés lors de la présentation et éventuellement lors de la discussion avec le jury. Il est nécessaire d'être en mesure de démontrer les résultats importants et de pouvoir les illustrer avec des exemples simples. Soigner la présentation d'un document écrit qui sert de support pour un cours est une compétence professionnelle importante du métier d'enseignant. Aussi, la formalisation mathématique et le français doivent être soignés, ainsi que la mise en forme, autant que possible dans le temps de préparation imparti : ces éléments ne peuvent que faciliter les interactions avec le jury. Il est inutile, voire contre-productif, de chercher à remplir à tout prix les 3 feuilles autorisées, surtout avec des éléments que la candidate ou le candidat ne maîtrise manifestement pas.

Pendant les 6 minutes de présentation, la candidate ou le candidat doit tenter de faire une synthèse de son plan en en expliquant les grandes lignes et les articulations. Il est inutile de recopier le plan au tableau, puisque le jury dispose d'une copie de ce document. Toutefois le jury encourage lescandidates et candidats à exploiter le tableau comme support pédagogique. Faire apparaître la structure de la leçon, illustrer une difficulté technique ou le principe d'une démonstration par une figure... permet à la candidate ou au candidat de s'affranchir de ses notes et rend l'exposé plus vivant. La présentation orale, la qualité d'expression, la compréhension synthétique, la plus-value de l'exposé par rapport au plan écrit, la capacité de la candidate ou du candidat à intéresser son auditoire sur une leçon donnée, constituent des éléments importants d'évaluation. Le jury se réjouit d'ailleurs des progrès constatés sur cette partie de l'épreuve.

Le jury attache une grande importance à la maîtrise du plan qui intervient de manière substantielle dans la grille de notation. Le plan ne peut être considéré comme maîtrisé si l'exposé ressemble à une récitation. Les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble de la leçon. Il est souhaitable que la candidate ou le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours. Il est indispensable que la candidate ou le candidat ait une idée assez claire de la difficulté des démonstrations des résultats qu'il évoque dans son plan. Le jury rappelle qu'il n'est pas nécessaire de s'aventurer au-delà des contours du programme pour prétendre à une très bonne note ! Plus généralement, il vaut mieux se cantonner à un niveau où l'on se sait solide plutôt que de chercher à placer des énoncés débordant du programme mais sans le recul, ni l'assurance technique nécessaires. Bien entendu, réussir cette partie de l'épreuve ne s'improvise pas et le discours doit avoir été réfléchi durant la préparation de l'épreuve, et plus largement tout au long du parcours qui conduit les candidates et candidats jusqu'au concours.

À la fin de cette présentation de la leçon, le jury peut éventuellement questionner très brièvement la candidate ou le candidat et aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

4.2.2 Deuxième partie : le développement

Le jury demande au candidat de proposer deux développements au moins. Il s'agit de résultats représentatifs de la leçon que la candidate ou le candidat est en mesure d'exposer en détail et sans notes.

Proposer un seul développement ou des développements de niveaux trop disparates conduit à une minoration de la note. Ces propositions de développements doivent être clairement mentionnées sur le plan écrit et non pas vaguement évoquées à l'oral. Dans cet esprit, la candidate ou le candidat doit pouvoir motiver le choix des développements qu'il propose et en quoi ces résultats ou énoncés sont centraux ou jouent à ses yeux un rôle particulier sur le sujet. la candidate ou le candidat doit aussi préciser, sur son plan écrit, ce qu'elle ou il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu' elle ou il va admettre pour mener à bien son développement. Il faut prendre garde dans ce choix à ne pas déclarer admis un énoncé majeur qui, une fois acquis, rend l'objet du développement trivial. De même il faut prendre garde aux « raisonnements circulaires »en faisant appel à un énoncé qu'on interpréterait comme une conséquence de celui qu'on cherche à démontrer. De telles maladresses sont perçues comme un défaut de maîtrise et de recul qui est pénalisé.

Le jury choisit le développement qui va être effectivement exposé par la candidate ou le candidat. Lla candidate ou le candidat dispose de 15 minutes (maximum) pour mener à bien son développement. La gestion du temps est une des difficultés de l'épreuve. Un exposé trop court est le signe d'un sujet mal choisi, inapproprié au concours ; une démonstration inachevée dans le temps imparti témoigne d'un manque de maîtrise. Le jury demande de bien gérer son tableau, en particulier la candidate ou le candidat doit demander aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Lors du développement, le jury attend de la candidate ou du candidat des explications sur la preuve et sur l'utilisation pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut être opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté. Trop peu des candidates et candidats commencent leur développement par une rapide synthèse des grandes idées ou des étapes qui le composent. Expliquer l'approche adoptée, et les difficultés, au début du développement est une démarche pédagogique appréciée. Un ou plusieurs dessins peuvent aider à clarifier la discussion technique. Il est inutile de se précipiter ou de parler trop vite ; on veillera au contraire à préciser ses notations, à soigner sa présentation, à placer sa voix et à regarder de temps en temps le jury. Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc*. Cette phase de l'épreuve vise à mettre en valeur des qualités pédagogiques autant que techniques et l'exposé doit faire la preuve de la compréhension du sujet par la candidate ou le candidat. La récitation mécanique d'un développement ne peut pas être convaincante ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'une future agrégée ou d'un futur agrégé . Un choix judicieux des notations utilisées contribuent à la clarté de l'exposé ; par exemple il peut être maladroit de noter deux polynômes P et P'... surtout si on doit travailler avec les dérivées de ceux-ci. Enfin, même si le jury laisse évoluer d'une future agrégé durant son développement, en intervenant le moins possible, il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, l'interrompre pour demander des explications. Cette intervention ne donne pas droit à une extension du temps consacré au développement.

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements. Il est souhaitable que la candidate ou le candidat recherche une adéquation entre le niveau auquel il souhaite se placer et les développements proposés. La candidate ou le candidat qui présenterait un développement non maîtrisé, manifestement mal compris ne serait pas avantagé.

Si le niveau de l'agrégation ne peut se cantonner aux notions abordées dans une classe de Terminale ou une première année post-bac, trop de candidates et candidats se lancent, curieusement, dans des propositions, parfois aux limites du programme, qui dépassent largement leur niveau technique. Dans un cas comme dans l'autre, il en résulte une appréciation négative. Le développement doit être en lien direct avec le thème de la leçon présentée. L'utilisation d'un résultat qui n'apparaît pas dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la preuve est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explication convaincante. Dans le cas d'un développement difficile, il ne faut pas négliger les cas élémentaires et les détails utiles à la compréhension du jury. Le jury déplore l'abus de certains développements plus ou moins classiques, qui ne sont pas toujours utilisés à bon escient et qui occupent parfois une place disproportionnée (l'ellipsoïde de JOHN, la décomposition de DUNFORD, le théorème de BERNSTEIN, le processus de GALTON-WATSON,...). Trop de candidates et candidats ont tendance à replacer exagérément et de manière inappropriée de tels développements et se retrouvent ainsi hors sujet, impair qui est sévèrement sanctionné. Il faut aussi veiller au fait que des thèmes peuvent être exploités dans des leçons différentes... mais avec des points de vue différents, qu'il faut savoir mettre en exergue.

Le programme du concours comprend maintenant un chapitre spécifique consacré aux méthodes numériques. Les candidates et candidats sont invités à explorer ce champ, éventuellement en s'appuyant sur leurs connaissances spécifiques à l'option de modélisation qu'ils ont choisie, pour proposer des développements originaux en lien avec l'analyse d'algorithmes de calcul. La description des leçons indique quelques pistes dans cette direction. Le jury se réjouit qu'un nombre croissant de candidates et candidats saisisse ces opportunités et espère que cette tendance, qui enrichit les contenus, se renforcera.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, la candidate ou le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Il est donc essentiel de montest rer qu'on capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier simple du résultat général qu'il vient d'exposer.

4.2.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury teste systématiquement la maîtrise du plan présenté. Une part importante de la discussion porte donc sur le plan, ou trouve sa source dans le plan présenté par la candidate ou le candidat . Il faut éviter que ce plan dépasse largement le niveau que l'on maîtrise. La candidate ou le candidat doit se préparer à des questions élémentaires voire considérées comme « évidentes »sur tout énoncé mis dans son plan, questions auxquelles il doit répondre avec précision. Des candidates ou candidats après des prestations relevées ont parfois pu être surpris par de telles questions portant sur les bases ; elles sont pourtant quasi-systématiques, le jury souhaitant précisément s'assurer de la maîtrise de ces bases. Le jury peut aussi proposer des calculs illustrant les notions évoquées par le plan.

Cette phase de l'épreuve requiert un certain recul qui ne peut être que le fruit d'un travail de préparation approfondi en amont du concours où l'on doit se demander si on est capable de mettre en œuvre des énoncés sur des situations simples et, pour certains théorèmes, réfléchir à des exemples ou des contre-exemples.

Les réponses aux questions des examinateurs ne prennent pas forcément une forme unique et ceux-ci se placent dans une posture de dialogue avec la candidate ou le candidat. Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon et le plan proposé mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiatement. Ces exercices ont plutôt pour objectif de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être perçu comme un échec et la candidate ou le candidat ne doit pas se décourager : plus qu'achever l'exercice, ce sont ses réactions qui importent (par exemple en identifiant l'énoncé de la leçon qui permettrait de traiter le problème et en se demandant si les hypothèses d'application sont satisfaites). Dans cette partie de l'épreuve, la candidate ou le candidat doit faire preuve de capacité d'écoute, qui est aussi évaluée ; il doit rester attentif aux suggestions du jury. Il est souvent utile d'exploiter le tableau pour bien reformuler la question, formaliser les pistes de réflexion et donner un support écrit à l'échange. Pendant cette discussion, le jury veille à laisser un temps raisonnable à la candidate ou au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Enfin, l'objet du concours étant de recruter de futurs enseignants, le jury peut aussi, comme l'indique l'article 8 de l'arrêté du 25 juillet 2014, poser toute question qu'il juge utile *lui permettant d'apprécier la capacité de la candidate ou du candidat, en qualité de futur agent du service public d'éducation, à prendre en compte dans le cadre de son enseignement la construction des apprentissages des élèves et leurs besoins, à se représenter la diversité des conditions d'exercice du métier, à en connaître de façon réfléchie le contexte, les différentes dimensions (classe, équipe éducative, établissement, institution scolaire, société) et les valeurs qui le portent, dont celles de la République. Le jury peut, à cet effet, prendre appui sur le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation fixé par l'arrêté du 1er juillet 2013.*

4.3 Épreuve orale d'algèbre et géométrie

Comme y invite clairement l'intitulé de l'épreuve, les exemples et applications motivés par la géométrie sont particulièrement bienvenus. Les thèmes relevant de la théorie des groupes se prêtent tout particulièrement à de telles illustrations. De plus, les connaissances spécifiques à chacune des trois options A, B et C fournissent des exemples d'applications très appréciés par le jury.
Les notions de quotients sont importantes, il est impératif de savoir utiliser la projection canonique et de maîtriser le passage au quotient dans le cadre d'un morphisme.

101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Le matériel théorique en accord avec le programme doit être présenté, accompagné d'illustrations pertinentes. Il faut pouvoir dégager l'intérêt des notions introduites avec des exemples d'actions bien choisies pour obtenir des informations soit sur un ensemble X donné, soit sur un groupe G donné et faire apparaître des sous-groupes intéressants de G comme stabilisateurs. Par ailleurs, la présentation doit illustrer comment l'étude des orbites de certaines actions revient à classifier certains objets, soit en trouvant un représentant simple de chaque orbite, soit en dégageant des invariants caractérisant les orbites. Les actions de groupes interviennent aussi efficacement dans des problèmes de dénombrements, notamment via la formule de BURNSIDE. Les exemples peuvent être internes à la théorie des groupes (action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1, ..., n\}$, action par translation ou par conjugaison, représentations de groupes, etc). Mais il est souhaitable d'emprunter aussi à d'autres domaines (action sur des anneaux, des espaces de matrices ou des espaces de polynômes, groupes d'isométries, etc). La géométrie fournit aussi de nombreux exemples pertinents (groupes d'isométries d'un polygone dans le plan ou d'un solide ou d'un polygone régulier dans l'espace).

Pour aller plus loin, on peut aborder l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{K})$ sur la droite projective menant au birapport ou celle de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de POINCARÉ ou les preuves par actions de groupes des théorèmes de SYLOW ou encore d'autres actions donnant lieu à des isomorphismes exceptionnels. Il est aussi possible de s'intéresser aux aspects topologiques ou différentiels liés à certaines actions.

102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

Les notions élémentaires concernant les nombres complexes de module 1 (définitions, exponentielle complexe, trigonométrie, etc.) doivent être présentés, avant d'aborder l'aspect « groupe »de S^1 en considérant son lien avec $(\mathbf{R}, +)$ et en examinant ses sous-groupes (en particulier finis). Il est souhaitable de présenter des applications en géométrie plane, par exemple la constructibilité des polygones réguliers. Plus généralement, la leçon invite à expliquer où et comment les nombres complexes de module 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques : spectres de matrices remarquables, polynômes cyclotomiques, et éventuellement les représentations de groupes, etc. On peut également s'intéresser aux sous-groupes compacts de $\mathbf{C}^*$.

Pour aller plus loin, on peut s'intéresser aux nombres de module 1 et aux racines de l'unité dans $\mathbf{Q}[i]$, ou à la dualité des groupes abéliens finis ou encore aux transformées de FOURIER discrètes et rapides. Des aspects analytiques du sujet peuvent être évoqués (théorème de relèvement, logarithme complexe, analyse de Fourier sur $\mathbf{R}^n$) mais ne doivent occuper ni le coeur de l'exposé, ni l'essentiel d'un développement.

103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Dans un premier temps, la notion de conjugaison dans un groupe introduite brièvement doit être développée et illustrée dans des situations variées. On doit proposer des situations où la conjugaison aide à résoudre certains problèmes (par exemple, en transformant un élément en un autre plus simple à manipuler). On peut aussi illustrer et utiliser le principe du « transport par conjugaison » voulant que hgh^{-1} ait la même « nature géométrique » que g.

Ensuite, il est attendu de développer l'intérêt de la notion de sous-groupe distingué en particulier en regard de la structure de groupe obtenue par quotient d'un groupe, le lien entre sous-groupe distingué et noyau de morphisme de groupes, ainsi que la factorisation d'un morphisme de groupe au travers d'un tel quotient. Il est indispensable de proposer quelques résultats bien choisis mettant en évidence l'utilisation de ces notions : citons par exemple le lien entre les sous-groupes de l'un et de l'autre et la caractérisation interne des produits directs. L'examen de la simplicité de certains groupes peut être proposé.

Comme indiqué dans le sujet, il est demandé de présenter des exemples pertinents utilisés pour obtenir des résultats significatifs. De tels exemples sont nombreux en théorie des groupes mais il est souhaitable d'en proposer dans d'autres domaines, comme en arithmétique, en géométrie et en algèbre linéaire.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent poursuivre en illustrant ces notions en théorie des représentations des groupes finis (classes de conjugaison et nombre de représentations irréductibles, treillis des sous-groupes distingués lu dans la table de caractères, etc.).

La notion de produit semi-direct et les théorèmes de SYLOW débordent du programme. Il est possible de les évoquer, mais en veillant à les illustrer par des exemples et des applications.

104 : Groupes finis. Exemples et applications.

Cette leçon est particulièrement vaste et il convient de faire des choix, qui devront pouvoir être justifiés.

La notion d'ordre (d'un groupe, d'un élément et d'un sous-groupe) est très importante dans cette leçon ; le théorème de LAGRANGE est incontournable. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit figurer dans cette leçon. Sa démonstration est techniquement exigeante, mais il faut que l'énoncé soit bien compris, en particulier le sens précis de la clause d'unicité, et être capable de l'appliquer dans des cas particuliers.

Il est souhaitable de présenter des exemples de groupes finis particulièrement utiles comme les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et $\mathfrak{S}_n$, en en maîtrisant les propriétés élémentaires (générateurs, classes de conjugaison, etc.) Il est important de connaître les groupes d'ordre premier ainsi que les groupes d'ordre inférieur à 8.

Des exemples de groupes finis issus de domaines autres que la théorie des groupes doivent figurer en bonne place dans cette leçon. L'étude des groupes d'isométries laissant fixe un polygone (ou un polyèdre) régulier peut être opportunément exploitée sous cet intitulé. Afin d'illustrer leur présentation, les candidates et candidats peuvent aussi s'intéresser à des groupes d'automorphismes ou étudier les groupes de symétries $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$ et relier sur ces exemples géométrie et algèbre.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'attarder sur la dualité dans les groupes abéliens finis. Comme application, la cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini est tout à fait adaptée. Il est possible d'explorer des représentations de groupes, de donner des exemples de caractères, additifs ou multiplicatifs dans le cadre des corps finis. Il est aussi possible de s'intéresser aux sommes de GAUSS. Les candidates et candidats peuvent ensuite introduire la transformée de FOURIER discrète, qui pourra être vue comme son analogue analytique, avec ses formules d'inversion, sa formule de PLANCHEREL. Ainsi, la leçon peut mener à introduire la transformée de FOURIER rapide sur un groupe abélien dont l'ordre est une puissance de 2 ainsi que des applications à la multiplication d'entiers, de polynômes et éventuellement au décodage de codes via la transformée de HADAMARD.

105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple) et savoir l'utiliser pour déterminer les classes de conjugaison du groupe symétrique et pour donner des systèmes de générateurs. L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement. Il est bon d'avoir en tête que tout groupe fini se plonge dans un groupe symétrique et de savoir calculer la signature des permutations ainsi obtenues dans des cas concrets. Les applications sont nombreuses, il est très naturel de parler du déterminant, des polynômes symétriques ou des fonctions symétriques des racines d'un polynôme. On peut également parler du lien avec les groupes d'isométries des solides.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'intéresser par exemple aux automorphismes du groupe symétrique, à des problèmes de dénombrement, aux représentations des groupes des permutations ou encore aux permutations aléatoires.

106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Les premières définitions et propriétés générales du groupe linéaire doivent être présentées : familles de générateurs, liens avec le pivot de Gauss, sous-groupes remarquables. Il est important de savoir faire correspondre certains sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.).

Il faut aussi savoir réaliser $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ et faire le lien entre signature et déterminant.

Il est souhaitable de dégager des propriétés particulières selon le corps de base, en particulier sa cardinalité lorsque le corps K est fini et les propriétés topologiques de ce groupe lorsque le corps est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent exploiter le fait que la théorie des représentations permet d'illustrer l'importance de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ et de son sous-groupe unitaire. Ils peuvent également étudier les sous-groupes compacts maximaux et les sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(n)$.

108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

La leçon doit être illustrée par des exemples de groupes très variés, dont il est indispensable de donner des parties génératrices. La description ensembliste du groupe engendré par une partie doit être connue et les groupes monogènes et cycliques doivent être évoqués.

Les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ fournissent des exemples naturels tout comme les groupes de permutations, les groupes linéaires ou leurs sous-groupes (par exemple $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ ou $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$). Ainsi, on peut s'attarder sur l'étude du groupe des permutations avec différents types de parties génératrices en discutant de leur intérêt (ordre, simplicité de $\mathcal{A}_5$ par exemple). On peut, en utilisant des parties génératrices pertinentes, présenter le pivot de Gauss, le calcul de l'inverse ou du rang d'une matrice, le groupe des isométries d'un triangle équilatéral. Éventuellement, il est possible de discuter des conditions nécessaires et suffisantes pour que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ soit cyclique ou la détermination de générateurs du groupe diédral.

On illustre comment la connaissance de parties génératrices s'avère très utile dans certaines situations, par exemple pour l'analyse de morphismes de groupes, ou pour montrer la connexité par arcs de certains sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Pour aller plus loin,on peut s'intéresser à la présentation de certains groupes par générateurs et relations. Il est également possible de parler du logarithme discret et de ces applications à la cryptographie (algorithme de Diffie-Hellman, cryptosystème de El Gamal).

120 : Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

Il est attendu de construire rapidement $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, puis d'en décrire les éléments inversibles, les diviseurs de zéro et les idéaux. Ensuite, le cas où l'entier n est un nombre premier doit être étudié. La fonction indicatrice d'Euler ainsi que le théorème chinois et sa réciproque sont incontournables. Il est naturel de s'intéresser à la résolution des systèmes de congruences.

Les applications sont très nombreuses. Les candidates et candidats peuvent, par exemple, choisir de s'intéresser à la résolution d'équations diophantiennes (par réduction modulo n bien choisi) ou bien au cryptosystème RSA. Si des applications en sont proposées, l'étude des morphismes de groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ ou le morphisme de Frobenius peuvent figurer dans la leçon.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent poursuivre en donnant une généralisation du théorème chinois lorsque deux éléments ne sont pas premiers entre eux, s'intéresser au calcul effectif des racines carrées dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, au logarithme discret, ou à la transformée de Fourier rapide.

121 : Nombres premiers. Applications.

Le sujet de cette leçon est très vaste. Elle doit donc être abordée en faisant des choix qui devront être clairement motivés. On attend une étude purement interne à l'arithmétique des entiers, avec des applications dans différents domaines : théorie des corps finis, théorie des groupes, arithmétique des polynômes, cryptographie, etc. On peut définir certaines fonctions importantes en arithmétique, les relier aux nombres premiers et illustrer leurs utilisations. Il est recommandè de s'intéresser aux aspects algorithmiques du sujet (tests de primalité). La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers doit être évoquée : certains résultats sont accessibles dans le cadre du programme du concours, d'autres peuvent être admis et cités pour leur importance culturelle.

122 : Anneaux principaux. Exemples et applications.

Cette leçon ne doit pas se cantonner aux aspects théoriques. L'arithmétique des anneaux principaux doit être décrite et les démonstrations doivent être maîtrisées (lemme d'EUCLIDE, théorème de GAUSS, décomposition en irréductibles, PGCD et PPCM, équations de type $ax+by = d$, etc.). On doit présenter des exemples d'utilisation effective du lemme chinois. Les anneaux euclidiens représentent une classe importante d'anneaux principaux et l'algorithme d'EUCLIDE a toute sa place dans cette leçon pour effectuer des calculs. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas et doivent être mentionnées (par exemple, le lemme des noyaux ou la notion de polynôme minimal pour un endomorphisme, pour un endomorphisme relativement à un vecteur ou pour un nombre algébrique). Si les anneaux classiques $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ doivent impérativement figurer, il est possible d'en évoquer d'autres (décimaux, entiers de GAUSS $\mathbf{Z}[i]$ ou d'EISENSTEIN $\mathbf{Z}[e^{2i\pi/3}]$) accompagnés d'une description de leurs inversibles, de leurs irréductibles, en lien avec la résolution de problèmes arithmétiques (équations diophantiennes).

Les candidates et candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant à l'étude des réseaux, à des exemples d'anneaux non principaux, par exemple $Z[X]$ ou $K[X,Y]$. À ce sujet, il sera fondamental de savoir déterminer les unités d'un anneau, et leur rôle au moment de la décomposition en facteurs premiers. De même, la résolution des systèmes linéaires sur $\mathbf{Z}$ ou le calcul effectif des facteurs invariants de matrices à coefficients dans un anneau principal peuvent être présentés en lien avec ce sujet.

123 : Corps finis. Applications.

La construction des corps finis doit être connue et une bonne maîtrise des calculs dans les corps finis est indispensable. Le calcul des degrés des extensions, le théorème de la base téléscopique, les injections des divers $\mathbf{F}_q$ sont incontournables. La structure du groupe multiplicatif doit aussi être connue.

Des applications des corps finis (y compris pour $\mathbf{F}_q$ avec q non premier !) ne doivent pas être oubliées. Par exemple, l'étude de polynômes à coefficients entiers et de leur irréductibilité peut figurer dans cette leçon. L'étude des carrés dans un corps fini et la résolution d'équations de degré 2 sont des pistes intéressantes.

Les candidates et candidats peuvent aller plus loin en détaillant des codes correcteurs ou en étudiant l'irréductiblilité des polynômes à coefficients dans un corps fini.

125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

Les extensions de degré fini, le théorème de la base téléscopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis, sont incontournables. Il est souhaitable d'introduire la notion d'élément algébrique et d'extension algébrique en en donnant des exemples. Il faut savoir calculer le polynôme minimal d'un élément algébrique dans des cas simples, notamment pour quelques racines de l'unité. La leçon peut être illustrée par des exemples d'extensions quadratiques et leurs applications en arithmétique, ainsi que par des extensions cyclotomiques.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent montrer que l'ensemble des nombres algébriques forme un corps algébriquement clos, par exemple en expliquant comment l'utilisation du résultant permet de calculer des polynômes annulateurs de sommes et de produits de nombres algébriques. Il est possible de s'intéresser aux nombres constructibles à la règle et au compas, et éventuellement s'aventurer en théorie de Galois.

127 : Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.

Le jury souhaite proposer une leçon qui offre une ouverture large autour du thème des nombres et des corps de nombres utilisés en algèbre ou en géométrie. L'objectif n'est pas d'en présenter le plus possible, mais plutôt d'en choisir certains, suffisamment variés, en en expliquant la genèse et en soulignant leur intérêt par des applications pertinentes. Les nombres décimaux, dyadiques, etc. fournissent des ensembles de nombres dont l'étude, si elle est accompagnée d'applications pertinentes, a sa place dans cette leçon. Les questions d'approximation diophantienne et leur lien avec les fractions continues, sans toutefois être un attendu de la leçon, entrent dans la suite logique de ce type de considération.
Le corps des nombres algébriques, ainsi que certains de ses sous-corps particuliers, comme celui formé par l'ensemble des nombres constructibles ou des sous-anneaux formés par certains ensembles d'entiers algébriques constituent des pistes d'étude. Les candidates et candidats qui maîtrisent ces notions pourront aussi s'aventurer du côté des nombres de Pisot.
La transcendance de π et celle de e sont des résultats à connaître, on pourra éventuellement en donner des applications, mais les démonstrations de ces résultats non triviaux ne sont pas exigibles. L'irrationalité de nombres remarquables ($\sqrt{2}$, nombre d'or, e, π) peut être abordée. Étudier les propriétés algébriques de certains ensembles de nombres (par exemple du type $\mathbb{Z}[\omega]$ où ω est un nombre algébrique) peut être une piste intéressante et mener à des applications en arithmétique.
L'utilisation des nombres complexes ou, pour aller plus loin, des quaternions, en géométrie ou en arithmétique constitue aussi une piste exploitable pour cette leçon.

141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Les généralités sur les algèbres de polynômes à une variable sont supposées connues. Le bagage théorique permettant de définir corps de rupture et corps de décomposition doit être présenté. Ces notions doivent être illustrées dans différents types de corps (réels, rationnels, corps finis) ; les corps finis peuvent être illustrés par des exemples de polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbf{F}_2$ ou $\mathbf{F}_3$. Il est nécessaire de présenter des critères d'irréductibilité de polynômes et les polynômes minimaux de quelques nombres algébriques, par exemple les polynômes cyclotomiques. Le théorème de la base téléscopique, ainsi que les utilisations arithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes sont incontournables. Des applications du corps de décomposition doivent être mentionnées, par exemple en algèbre linéaire.

Pour aller plus loin, on peut montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels est un corps algébriquement clos, s'intéresser aux nombres constructibles à la règle et au compas, et éventuellement s'aventurer en théorie de Galois.

142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

Le candidat doit prendre soin de différencier le cadre théorique des anneaux factoriels ou principaux dans lequel sont définis les PGCD et PPCM et dans lequel s'appliquent les énoncés des théorèmes proposés et le cadre euclidien fournissant les algorithmes. Le champ d'étude de cette leçon ne peut se limiter au cas de $\mathbf{Z}$, mais la leçon peut opportunément s'illustrer d'exemples élémentaires d'anneaux euclidiens, comme $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$.

Une part substantielle de la leçon doit être consacrée à la présentation d'algorithmes : algorithme d'Euclide, algorithme binaire, algorithme d'Euclide étendu. Il est possible d'en évaluer le nombre d'étapes dans les pires cas et faire le lien avec les suites de FIBONACCI.

Des applications élémentaires sont particulièrement bienvenues : calcul de relations de BEZOUT, résolutions d'équations diophantiennes linéaires, inversion modulo un entier ou un polynôme, calculs d'inverses dans les corps de rupture, les corps finis. On peut aussi évoquer le théorème chinois effectif, la résolution d'un système de congruences et faire le lien avec l'interpolation de LAGRANGE.

Pour aller plus loin, on peut évoquer le rôle de algorithme d'EUCLIDE étendu dans de nombreux algorithmes classiques en arithmétique (factorisation d'entiers, de polynômes, etc). Décrire l'approche matricielle de l'algorithme d'EUCLIDE et l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}^2$ est tout à fait pertinent. On peut aussi établir l'existence d'un supplémentaire d'une droite dans $\mathbf{Z}^2$, ou d'un hyperplan de $\mathbf{Z}^n$, examiner l'éventuelle possibilité de compléter un vecteur de $\mathbf{Z}^n$ en une base. On peut aussi étudier les matrices à coefficients dans un anneau principal ou euclidien, et, de manière plus avancée, la forme normale d'HERMITE et son application à la résolution d'un système d'équations diophantiennes linéaires. De même, aborder la forme normale de SMITH, et son application au théorème de la base adaptée, permet de faire le lien avec la réduction des endomorphismes *via* le théorème des invariants de similitude. La leçon invite aussi, pour des candidates et candidats maîtrisant ces notions, à décrire le calcul de PGCD dans $\mathbf{Z}[X]$ et $\mathbf{K}[X, Y]$, avec des applications à l'élimination de variables. On peut rappeler les relations entre PGCD et résultant et montrer comment obtenir le PGCD en échelonnant la matrice de SYLVESTER. Sur l'approximation diophantienne, on peut enfin envisager le développement d'un rationnel en fraction continue et l'obtention d'une approximation de PADÉ-HERMITE à l'aide de l'algorithme d'EUCLIDE, la recherche d'une relation de récurrence linéaire dans une suite ou le décodage des codes BCH.

144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

Dans cette leçon, il est indispensable de bien définir l'ordre de multiplicité d'une racine (définition algébrique et analytique, quand c'est possible). Les fonctions symétriques élémentaires et les relations entre coefficients et racines doivent être maîtrisées et pouvoir être mises en œuvre. Des méthodes, même élémentaires, de localisation des racines ont toute leur place et peuvent déboucher sur des résultats de topologie à propos de la continuité des racines.

Il est pertinent d'introduire la notion de polynôme scindé et de citer le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS. On peut faire apparaître le lien entre la recherche des racines d'un polynôme et la réduction des matrices. Les candidates et candidats peuvent également s'intéresser aux racines des polynômes orthogonaux, ou aux règles des signes de DESCARTES et de STURM. L'étude des propriétés des nombres algébriques ont leur place dans cette leçon. La théorie des corps et le cas particulier des corps finis peuvent aussi être évoqués de façon pertinente.

Les candidates et candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant à des problèmes de localisation des valeurs propres, comme les disques de GERSHGORIN ou au calcul effectif d'expressions polynomiales symétriques des racines d'un polynôme.

Il ne s'agit par contre en aucun cas d'adapter le plan de la leçon 141 : l'irréductibilité des polynômes peut être évoquée mais ne doit pas être l'élément central de la leçon.

148 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il est indispensable de présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Il est en particulier important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie.

On peut montrer, sur des exemples, comment la dimension finie intervient dans la démonstration de certains résultats (récurrence sur la dimension, égalité de sous-espaces par inclusion et égalité des dimensions, isomorphisme par injectivité et dimension, etc.). À cette occasion, on pourra signaler des résultats qui ne subsistent pas en dimension infinie. Le pivot de GAUSS ainsi que les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses : existence de polynômes annulateurs, dimension de l'espace des formes n-linéaires alternées en dimension n, isomorphisme avec le dual dans le cadre euclidien et théorème de RIESZ, espaces de solutions d'équations différentielles ordinaires, caractérisation des endomorphismes diagonalisables, décomposition d'isométries en produits de réflexions, dimensions des représentations irréductibles d'un groupe fini, théorie des corps finis, etc.

Les caractérisations du rang peuvent aussi être utilisées pour démontrer l'invariance du rang par extension de corps, ou pour établir des propriétés topologiques (sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques. Il est également possible d'explorer des applications en analyse comme les extréma liés. Dans un autre registre, il est pertinent d'évoquer la méthode des moindres carrés dans cette leçon, par exemple en faisant ressortir la condition de rang maximal pour garantir l'unicité de la solution et s'orienter vers les techniques de décomposition en valeurs singulières pour le cas général. On peut alors naturellement analyser l'approximation d'une matrice par une suite de matrices de faible rang.

149 : Déterminant. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il faut commencer par définir correctement le déterminant. et savoir démontrer ses propriétés fondamentales (en particulier le fait que l'espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1). La distinction entre le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée et le déterminant d'un endomorphisme doit être comprise. L'interprétation en termes de volume est essentielle. Le calcul explicite est important, mais le jury ne peut se contenter d'un déterminant de VANDERMONDE ou d'un déterminant circulant. Les opérations élémentaires permettant de calculer des déterminants doivent être présentées et illustrées. Parmi les applications possibles, on peut citer le polynôme caractéristique, les déterminants de GRAM (permettant des calculs de distances), le déterminant jacobien (utile en calcul intégral et en probabilités), donner des exemples d'utilisation du déterminant en géométrie (coordonnées barycentriques, colinéarité, etc.) ou son rôle dans l'étude des formes quadratiques. Il est bienvenu d'illustrer la continuité du déterminant par une application. On pourra aussi s'intéresser à sa différentielle.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux calculs de déterminants sur $\mathbf{Z}$. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent aussi trouver leur place dans cette leçon pour des candidates et candidats ayant une pratique de ces notions.

150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$, en particulier en connaître la dimension, et aux liens entre réduction de l'endomorphisme u et structure de l'algèbre $\mathbf{K}[u]$. Il est ensuite possible de s'intéresser aux propriétés globales de cette algèbre (inversibles, condition nécessaire et suffisante assurant que ce soit un corps...). De même il est important de mettre en évidence les liens entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques.

Le lemme des noyaux, les polynômes caractéristiques et minimaux doivent figurer dans la leçon. Il faut bien préciser que, dans la réduction de DUNFORD, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître des conséquences théoriques et pratiques.

On attend que la candidate ou le candidat soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). L'aspect applications est trop souvent négligé. Il est par exemple possible d'envisager des applications au calcul de A^k à l'aide d'un polynôme annulateur, aux calculs d'exponentielles de matrices ou de mener l'analyse spectrale de matrices stochastiques.

Pour aller plus loin, la candidate ou le candidat pourra étudier des équations matricielles et de calcul fonctionnel, avec par exemple l'étude de l'extraction de racines ou du logarithme.

151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Dans cette leçon, il faut présenter des propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées sont les bienvenues, par exemple dans le cas d'une matrice diagonalisable ou dans le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum.

L'étude des endomorphismes cycliques et des endomorphismes semi-simples trouvent tout à fait leur place dans cette leçon. Dans le cas des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on pourra, si on le souhaite, caractériser ces derniers par la fermeture de leur orbite.

Il ne faut pas oublier d'examiner le cas des sous-espaces stables par des familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des propriétés des endomorphismes commutant entre eux.

La réduction des endomorphismes normaux et l'exemple de résolutions d'équations matricielles peuvent être présentés en applications.

La décomposition de Frobenius constitue également une application intéressante de cette leçon. Pour aller plus loin, on peut envisager de développer l'utilisation de sous-espaces stables en théorie des représentations.

152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Dans cette leçon, on attend des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On doit notamment savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable. Il ne faut pas oublier de parler du cas des endomorphismes symétriques, ni les familles commutantes d'endomorphismes diagonalisables. On peut étudier certaines propriétés topologiques en prenant le soin de donner des précisions sur le corps $\mathbf{K}$ et la topologie choisie pour $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux propriétés de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables dans les corps finis, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide.

153 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

Cette leçon doit aborder le bagage théorique propre aux vecteurs propres et aux valeurs propres et mettre en lumière l'exploitation de techniques d'algèbre ou d'analyse pour aborder leur recherche. Après avoir exploré la détermination théorique exacte des éléments propres, on s'intéresse à des exemples de matrices dont les éléments propres sont remarquables (matrices compagnons, matrices circulantes, matrices d'ordre fini, matrices stochastiques...) et donne des exemples de situations où la connaissance d'éléments propres s'avère utile. On doit connaître les limites du calcul exact, même si le cadre mathématique nécessaire est non exigible et hors programme, et introduire sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbf{C}$ une ou plusieurs méthodes itératives, dont on démontre la convergence. On peut citer les méthodes de la puissance, puissance inverse et QR pour la recherche d'éléments propres. Les notions de norme matricielle, de rayon spectral doivent être maîtrisées. Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu et illustré. On peut aussi s'intéresser à la localisation des valeurs propres.

Pour aller plus loin, on peut aborder la problématique du conditionnement en distinguant le problème général et le cas particulier des matrices auto-adjointes, s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être faits avec la théorie des représentations et la transformée de FOURIER rapide, ainsi qu'au comportement de la suite des itérées de matrices stochastiques ou plus généralement de matrices à coefficients positifs, au moins dans des cas particuliers.

155 : Exponentielle de matrices. Applications.

Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut savoir justifier précisément la convergence de la série exponentielle.

Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées en distinguant les cas réel et complexe. Il est souhaitable de connaître l'image par exponentielle de certains sous-ensembles de matrices (ensemble des matrices symétriques, hermitiennes, ou antisymétriques).

La décomposition de DUNFORD multiplicative (décomposition de JORDAN) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. L'exponentielle en lien avec la décomposition polaire peut s'avérer utile dans l'étude de sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) peut être menée dans cette leçon.

Les applications aux équations différentielles méritent d'être présentées sans toutefois constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidates et candidats de proposer ce thème dans un développement de cette leçon, sauf à avoir bien compris comment les apports algébriques permettent ici de simplifier les conclusions analytiques.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$) ou vers les algèbres de LIE.

156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Il est indispensable de connaître les polynômes caractéristiques et minimaux d'un endomorphisme nilpotent et de savoir justifier son caractère trigonalisable. Il est bon de savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme trigonalisable (respectivement nilpotent) sur un sous-espace stable est encore trigonalisable (respectivement nilpotent). L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, par exemple pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée ; l'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. L'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Jordan ou la décomposition de FROBENIUS, ou des caractérisations topologiques des endomorphismes nilpotents, ou encore des propriétés topologiques de l'ensemble des endomorphismes nilpotents.

157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Le théorème spectral est indispensable dans cette leçon. Une place importante mérite d'être faite au cas particulier des matrices symétriques positives et définies positives ; les candidates et candidats doivent connaître leurs propriétés fondamentales, leur rôle, et la structure de leur ensemble. La notion de signature pourra être présentée en montrant comment elle détermine la classe de congruence d'une matrice symétrique réelle. L'action du groupe linéaire et du groupe orthogonal sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes est incontournable. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.

Les candidates et candidats maîtrisant ces notions pourront illustrer la leçon en évoquant le cas des matrices de covariance de vecteurs aléatoires et discuter les conditions en assurant le caractère inversible, la décomposition de CHOLESKY, qui a de nombreuses applications pour le calcul scientifique (en lien avec la résolution de systèmes linéaires ou de problèmes de moindres carrés) ou en probabilités (construction d'un vecteur gaussien de matrice de covariance donnée à partir d'un vecteur gaussien de matrice de covariance identité), ou la décomposition en valeurs singulières d'une matrice (particulièrement importante pour le traitement massif de données).

158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Dans cette leçon, le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Le théorème spectral pour les auto-adjoints et la réduction des endomorphismes orthogonaux sont des résultats incontournables. Le jury met les candidates et candidats en garde sur le fait que le lemme des noyaux ou la décomposition de DUNFORD ne sont pas des développements adaptés à cette leçon. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. De même la réduction d'endomorphismes normaux peut être évoquée.

L'étude des projections orthogonales (en lien ave le calcul de distances), des rotations, des réflexions, des renversements, etc. fournit des exemples dignes d'intérêt. Une illustration pertinente peut s'appuyer sur la description de problèmes de moindres carrés en faisant ressortir le rôle de l'hypothèse de rang plein de A sur le caractère inversible de $A^\intercal A$.

159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon ; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Le passage d'une base à sa base duale ou antéduale, ainsi que les formules de changement de base, doivent être maîtrisés. On pourra s'intéresser aux cas spécifiques où l'isomorphisme entre l'espace et son dual est canonique (cas euclidien, cas des matrices).

Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Le lien avec la résolution des systèmes linéaires doit être fait.

Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.

Pour des candidates et candidats ayant une pratique de ces notions, il est possible d'illustrer la leçon avec un point de vue probabiliste, en rappelant que la loi d'un vecteur aléatoire X est déterminée par les lois unidimensionnelles de $X \cdot u$ pour tout vecteur u.

161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.

Les généralités sur les espaces euclidiens et affines sont supposées connues. La leçon reste contenue dans le cadre des espaces de dimension finie.

La notion de distance est abordée dans le cadre de la norme euclidienne : les projections orthogonales doivent être mentionnées. Les déterminants de Gram et des inégalités du type des inégalités d'Hada-

mard ont toute leur place dans cette leçon.
La classification des isométries en dimension 2 et 3 est exigible. En dimension 3, il faut savoir classifier les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut aussi penser aux isométries laissant stables certains objets en dimension 2 et 3.
Il faut savoir justifier qu'une isométrie est affine, pouvoir donner des générateurs du groupe des isométries affines et savoir composer des isométries affines. Les groupes de similitudes peuvent également être abordés.
Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent évoquer l'interprétation de l'écart-type comme une distance, et présenter la matrice de covariance comme un exemple pertinent de matrice de Gram. Ainsi, les déterminants de GRAM permettent de calculer l'erreur commise dans le cadre de prédictions affines.

162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Dans cette leçon, les techniques liées au simple pivot de Gauss constituent l'essentiel des attendus. Il est impératif de faire le lien avec la notion de système échelonné (dont on donnera une définition précise et correcte) et de situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire, sans oublier la dualité. Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt algorithmique des méthodes présentées doit être expliqué, éventuellement en l'illustrant par des exemples simples (où l'on attend parfois une résolution explicite).

Parmi les conséquence théoriques, les candidates et candidats peuvent notamment donner des systèmes de générateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$. Ils est aussi pertinent de présenter les relations de dépendance linéaire sur les colonnes d'une matrice échelonnée qui permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent exploiter les propriétés des systèmes d'équations linéaires pour définir la dimension des espaces vectoriels et obtenir une description de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels donnés par des systèmes générateurs, ou d'une somme de deux sous-espaces vectoriels donnés par des équations.

De même, des discussions sur la résolution de systèmes sur $\mathbf{Z}$ et la forme normale de Hermite peuvent trouver leur place dans cette leçon. Enfin, il est possible de présenter les décompostions LU et de Choleski, en évaluant le coût de ces méthodes ou encore d'étudier la résolution de l'équation normale associée aux problèmes des moindres carrés et la détermination de la solution de norme minimale par la méthode de décomposition en valeurs singulières.

170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

La leçon débute par une étude générale des formes quadratiques, indépendamment du corps. On peut, par exemple, adopter le point de vue de l'action par congruence du groupe linéaire sur l'espace des matrices symétriques, ce qui permet de dégager quelques invariants (rang, discriminant), de s'interroger sur le nombre et la structure des orbites. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être mis en œuvre sur une forme quadratique simple. En ajout de la classification sur $\mathbb{R}$, le candidat pourra parler de la classification des formes quadratiques sur le corps des complexes. Il est aussi possible de s'intéresser à la classification sur les corps finis. On peut s'intéresser au groupe orthogonal (générateurs, structure du groupe quand l'espace est de dimension 2). Le lien avec la dualité des espaces vectoriels permet de comprendre le sens de la décomposition de Gauss et de comparer les notions de sous-espace orthogonal, en s'interrogeant sur les conditions pour que que l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel en soit un supplémentaire. La notion d'isotropie doit être connue. On pourra rattacher cette notion à la géométrie différentielle. Pour aller plus loin, on peut s'intéresser aux espaces hyperboliques, ou à l'étude de la géométrie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une forme quadratique de signature (p, q), notamment la structure du cône de lumière de l'espace-temps de Minkowski, avec la traduction géométrique de la notion d'orthogonal dans ce cas et des propriétés du groupe $O(p, q)$.

171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Dans cette leçon, la loi d'inertie de SYLVESTER doit être présentée ainsi que l'orthogonalisation simultanée. L'algorithme de GAUSS doit être énoncé et pouvoir être mis en œuvre sur une forme quadratique simple ; le lien avec la signature doit être clairement énoncé et la signification géométrique des deux entiers r et s composant la signature d'une forme quadratique réelle doit être expliquée. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante qui mérite d'être présentée dans cette leçon.

La définition et les propriétés classiques des coniques d'un plan affine euclidien doivent être connues. On peut présenter les liens entre la classification des formes quadratiques et celles des coniques ; de même il est intéressant d'évoquer le lien entre le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$. La classification des quadriques n'est pas exigible, mais des situations particulières doivent pouvoir être discutées.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aussi aller vers la théorie des représentations et présenter l'indicatrice de SCHUR-FROBENIUS qui permet de réaliser une représentation donnée sur le corps des réels.

181 : Convexité dans $\mathbf{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.

Daans cette leçon, la notion de convexité doit être abordée d'un point de vue géométrique : les barycentres sont incontournables, et on doit, à ce titre, pouvoir utiliser la notion de coordonnées barycentriques. Les exemples géométriques sont importants et on espère que les notions introduites soient illustrées par des figures.
Il est important de parler d'enveloppe convexe et de savoir dessiner l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans le plan ; le théorème de GAUSS-LUCAS trouve parfaitement sa place dans cette leçon. Il semble approprié d'évoquer les points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent.
Par ailleurs, il est important d'avoir compris le lien entre fonctions convexes et ensembles convexes.
L'étude de certains ensembles convexes de matrices et de leurs propriétés rentre tout à fait dans le cadre de la leçon : on peut penser au cône des matrices symétriques (définies) positives, sur lequel le déterminant est log-convexe.

Pour aller plus loin, , les candidates et candidats peuvent présenter le lemme de FARKAS, le théorème de séparation de HAHN-BANACH, les théorèmes de HELLY et de CARATHEODORY, ou parler des sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Il est nécessaire de dégager clairement différentes méthodes de dénombrement et de les illustrer d'exemples significatifs. De nombreux domaines des mathématiques sont concernés par des problèmes de dénombrement, cet aspect varié du thème de la leçon doit être mis en avant. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. De plus, il est naturel de calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités. Il est important de connaître l'interprétation ensembliste de la somme des coefficients binomiaux et ne pas se contenter d'une justification par le binôme de NEWTON. L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien avec l'algèbre linéaire. Les actions de groupes peuvent également conduire à des résultats remarquables.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aussi présenter des applications de la formule d'inversion de MÖEBIUS ou de la formule de BURNSIDE. Des candidates et candidats ayant un bagage probabiliste pourront explorer le champ des permutations aléatoires, en présentant des algorithmes pour générer la loi uniforme sur le groupe symétrique S_n et analyser certaines propriétés de cette loi uniforme (points fixes, cycles, limite $n \to +\infty$...).

191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

Le jury souhaite proposer une leçon qui offre une ouverture large autour du thème de la géométrie. Avec cet intitulé, les candidates et candidats sont libres de présenter des résultats et des exemples très variés en lien avec la géométrie. L'objectif n'est pas de couvrir le plus d'aspects possible, mais plutôt d'en proposer certains suffisamment consistants et variés. À partir du moment où ils sont de nature géométrique, tous les éléments du programme peuvent être pertinents. En contrepartie de cette liberté laissée aux candidates et candidats, une difficulté est de structurer la présentation des objets et des notions choisis. Ainsi, plusieurs approches sont possibles pour organiser cette leçon, par exemple :

— en regroupant les outils par « famille » : outils matriciels (repérage des points par des matrices colonnes, des transformations par des matrices, rang, réduction, etc.), outils polynomiaux (formes quadratiques, déterminant, résultant, etc.), outils structurels (groupes, corps) ;

— ou par niveau d'abstraction/de généralité (nombres réels, complexes, matrices, groupes...) ;

— ou par type d'objectifs (identifier des objets géométriques, les mesurer, les classifier, démontrer des résultats en utilisant des transformations géométriques...)

Il est aussi possible de se focaliser sur un seul type d'outils (par exemple algèbre linéaire, géométrie affine ou groupes) en détaillant plusieurs applications en géométrie ou sur une question géométrique fouillée à l'aide de diverses techniques (par exemple sur des problèmes impliquant des figures géométriques comme les cercles et triangles, les polygones et polyèdres réguliers, etc.). Des situations « élémentaires », dans le plan, permettent certainement de mettre en valeur des connaissances et un recul mathématique. Il faut bien éviter l'écueil d'un catalogue fastidieux ou celui qui consisterait à recycler directement le contenu d'une autre leçon avec un vague habillage géométrique.

Parmi les nombreux éléments qui peuvent être discutés, on peut indiquer :

— les notions de distance, aire, volume. Notamment les propriétés de la matrice de Gram, le lien entre déterminant et aire d'un parallélogramme ou volume d'un parallélépipède, la construction du produit vectoriel et du produit mixte,... peuvent être exploités avec pertinence dans cette leçon. On peut ainsi être amené à étudier l'aire balayée par un arc paramétré du plan, la position d'un point par rapport à un cercle circonscrit à un triangle, etc. Le déterminant de Cayley-Menger permet de mettre en évidence des conditions pour que $n+1$ points de $\mathbf{R}^n$ forment une base affine, ou que $n+2$ points de $\mathbf{R}^n$ soient cocycliques. Dans une autre direction, la division euclidienne dans $\mathbf{Z}$ donne une preuve d'une forme du théorème de la base adaptée, avec pour conséquence le calcul du volume (d'une maille élémentaire) d'un sous réseau de $\mathbf{Z}^n$ comme étant le déterminant d'un système générateur dans la base canonique.

— l'apport de l'algèbre linéaire à la géométrie. On peut ainsi exploiter le calcul matriciel et les techniques de réduction pour mettre en évidence des informations de nature géométrique (avec les exemples fondamentaux des homothéties, projections, symétries, affinités, rotations, la classification des isométries vectorielles, etc.). On peut être alors amené à présenter le théorème de Cartan-Dieudonné sur la décomposition d'isométries euclidiennes en produit de réflexions ou encore évoquer une (ou des) interprétation(s) géométrique(s) de la décomposition en valeurs singulières. Dans cette même veine, la leçon peut être orientée vers la géométrie affine, en s'adossant à la théorie des espaces vectoriels pour définir certains objets (espaces et sous-espaces affines, applications affines, repères affines, etc), ce qui permet, par exemple, d'établir ainsi certains résultats classiques, comme les théorèmes de Thalès, Pappus, Desargues,...

— l'analyse des formes quadratiques permet d'aborder des problèmes géométriques : étude des coniques, quadriques, classification des quadriques de $\mathbf{R}^n$, interprétation géométrique de la signature, application des méthodes de réduction, etc.

— la théorie des groupes est un champ naturel pour cette leçon (mais qui n'est cependant pas indispensable) : groupes de transformations (isométries, déplacements, similitudes, translations), composition de transformations, mise en évidence d'invariants fondamentaux (angle, birapport, excentricité d'une conique). Il est possible de se focaliser sur des groupes de transformations préservant une certaine structure géométrique et en distinguant parmi eux les groupes finis (groupes d'isométries classiques), les groupes discrets infinis (avec des translations, groupes de pavages) et, pour aller plus loin, les groupes continus (groupes de Lie).

— les techniques de convexité constituent aussi un champ fructueux : le théorème de séparation par un hyperplan dans $\mathbf{R}^n$ de Hahn-Banach et, en corollaire, le théorème de Helly permettent par exemple d'établir des propriétés intéressantes sur les cordes de convexes compacts.

— certains candidates et candidats peuvent trouver intérêt à aborder les questions d'intersection de courbes polynomiales, qui permettent notamment de mettre en œuvre le théorème de Bezout et des méthodes exploitant la notion de résultant.

— un grand nombre de problèmes de géométrie peuvent être traités en exploitant le formalisme des nombres complexes. Il est tout à fait approprié d'évoquer l'étude des inversions et, en particulier, la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement ; la formule de Ptolémée illustre bien l'utilisation de cet outil. On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ et aborder la construction de la sphère de Riemann.

— les problématiques de la construction à la règle et au compas constituent un autre axe pertinent pour cette leçon, avec le théorème de Wantzel, et peuvent conduire à s'intéresser à des extensions de corps.

Comme dans le cas des autres leçons, il est tout à fait bienvenu de chercher à illustrer cette leçon par des exemples issus de l'analyse, des probabilités, de la statistique (par exemple en évoquant l'interprétation géométrique de l'analyse en composantes principales), du calcul formel (par exemple avec les applications du résultant) ou du calcul scientifique (par exemple en présentant des problématiques de géométrie computationnelle, comme le calcul d'enveloppe convexe, les algorithmes de triangulation de Delaunay, les diagrammes de Voronoi...). Les thèmes en lien avec la géométrie projective ou la géométrie algébrique peuvent permettre à certains candidates et candidats de présenter des résultats très avancés. Cette leçon nécessite une préparation très personnelle et réfléchie. Les exemples et les résultats qui y sont présentés ont vocation à inciter les candidates et candidats à enrichir les autres leçons de cette épreuve d'exemples issus de la géométrie.

4.4 Épreuve orale d'analyse et probabilités

201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications. Sans sortir du programme, il y a au moins deux thèmes très riches pour nourrir le plan : espaces de fonctions continues sur un compact, espaces L^p sur le cercle ou sur la droite réelle.

Sur le premier sujet, le jury attend une bonne familiarité avec la convergence uniforme et son utilisation pour justifier des régularités. Le théorème de Stone-Weierstrass est évidemment incontournable, dans ses différentes versions, constructives ou non. La complétude peut également être exploitée, par exemple en lien avec les équations différentielles ou intégrales.

Sur le second, la convolution et ses applications, ainsi que l'analyse de Fourier fournissent un large terrain d'exploration.

Plusieurs prolongements s'offrent aux candidates et candidats solides : théorème de Baire et ses innombrables applications, espaces de fonctions holomorphes (théorème de Montel et ses applications, espaces de Hardy, etc.), espaces de fonctions régulières (fonctions lipschitziennes, C^k, classe de Schwartz), algèbres de Banach de fonctions (algèbre de convolution $L^1(\mathbf{R})$, algèbre du disque, algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, etc.), étude des parties compactes de $C(K)$ (K compact) voire de L^p.

203 : Utilisation de la notion de compacité. Cette leçon ne porte pas sur la compacité en général mais sur son utilisation. On peut songer à plusieurs thèmes : théorèmes d'existence exploitant la compacité, utilisation de la compacité pour obtenir des uniformités.

Sur le premier sujet, on peut s'intéresser à l'utilisation, dans les espaces compacts ou les espaces normés de dimension finie, des valeurs d'adhérence pour prouver des convergences ou des continuités, et bien sûr aux problèmes d'extrema. Un exemple est le théorème d'équivalence des normes sur un espace de dimension finie, qui repose sur un argument de compacité qu'il faut avoir bien compris.

Sur le second, on peut explorer quelques unes des innombrables applications du théorème de Heine (intégrabilité au sens de Riemann des fonctions continues sur un segment, continuité des translations dans L^p, etc), mais aussi l'utilisation de sous-recouvrements finis (par exemple pour passer du local au global).

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la caractérisation des espaces normés de dimension finie par la compacité de la boule unité fermée (éventuellement assortie d'applications), aux équations différentielles non linéaires (phénomène de sortie de tout compact), à l'équicontinuité (théorème d'Ascoli), aux familles normales (théorème de Montel), aux opérateurs compacts.

204 : Connexité. Exemples d'applications. Dans cette leçon, une fois les propriétés élémentaires présentées, il convient de mettre en évidence à travers un choix judicieux, non nécessairement exhaustif, d'applications le fait que la connexité formalise l'idée d'espace «d'un seul tenant», que la connexité par arcs permet d'illustrer géométriquement. Du point de vue opérationnel, les deux idées maîtresses sont la préservation de la connexité par image continue, et l'utilisation de la connexité pour passer du local au global.

La seconde est abondamment illustrée dans le domaine du calcul différentiel, des équations différentielles non linéaires (passage d'une unicité locale à une unicité globale), des fonctions holomorphes (principe du prolongement analytique ou du maximum).

En cas de non-connexité, la notion pertinente est celle de composante connexe, dont une première application est la structure des ouverts de $\mathbf{R}$, et leur mesure. Les exemples issus de l'algèbre linéaire sont bien entendu les bienvenus, à condition de ne pas trop détourner la leçon...

Pour les candidates et candidats solides, de bons prolongements sont le théorème de Runge, l'ensemble triadique de Cantor comme prototype d'espace métrique compact, parfait et totalement discontinu, la notion de simple connexité.

205 : Espaces complets. Exemples et applications. L'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence. Les illustrations ne manquent pas : existence de limites, utilisation de la convergence absolue ou normale, théorème du point fixe de Picard-Banach et ses applications, prolongement des applications uniformément continues à valeurs dans un espace métrique complet, et leurs innombrables applications.

Le cas particulier des espaces de Hilbert est un riche terrain d'exploration : théorème de projection sur un convexe fermé et ses applications, analyse de Fourier sur le cercle ou sur la droite réelle.

Les espaces L^p peuvent être abordés dans le cadre de cette leçon, mais sous leur angle spécifique d'espaces de Banach.

Pour les candidates et candidats solides, le théorème de Baire fournit d'innombrables applications passionnantes. Ils pourront également songer à la théorie des algèbres de Banach, notamment l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, ou à l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de C muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse. Cette leçon d'exemples est l'occasion d'une réflexion sur de nombreuses parties du programme.

En topologie, il s'agit bien sûr des propriétés spécifiques aux espaces normés de dimension finie, notamment l'utilisation des valeurs d'adhérence, l'équivalence des normes ou encore l'identité entre parties compactes et parties fermées et bornées. D'autres champs d'application sont : la théorie de la mesure (mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$), le calcul différentiel (utilisation de matrices jacobiennes, espaces tangents, extrema liés, etc.), les équations différentielles linéaires, les séries de Fourier et plus généralement l'approximation dans un espace préhilbertien séparable par projection sur des sous-espaces de dimension finie.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder la question de l'unicité de la meilleure approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d, ou les liens entre la régularité et la qualité de l'approximation par des polynômes (algébriques ou trigonométriques) voire des fonctions rationnelles. D'autres pistes possibles sont l'étude des propriétés spectrales des opérateurs compacts, ou le théorème de Grothendieck sur les sous-espaces fermés de L^p contenus dans L^∞.

208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples. Cette leçon est particulièrement vaste, et il convient de faire des choix. Il est inutile de commencer systématiquement le plan de cette leçon par de longs rappels sur les normes : comme toutes les autres, cette leçon ne doit pas tomber dans le formalisme, mais bien proposer des résultats significatifs illustrés par des exemples bien choisis, en particulier de normes équivalentes ou non, ou de calculs de normes subordonnées. En ce qui concerne le contenu, le programme offre de nombreuses possibilités qui permettent aussi de faire un développement conséquent d'un résultat central ou d'un enchaînement de résultats centraux de cette leçon : cas de la dimension finie, intervention de la complétude (en particulier le cas hilbertien), étude de la compacité de la boule unité fermée, lien entre continuité d'une forme linéaire (ou plus généralement, d'une application linéaire de rang fini) et fermeture du noyau...

Pour les candidates et candidats solides, des prolongements possibles sont : les conséquences du théorème de Baire dans le cadre des espaces de Banach (tout particulièrement le théorème de Banach-Steinhaus et son utilisation pour construire des objets pathologiques), le théorème de Hahn-Banach et ses conséquences, la théorie de algèbres de Banach, la détermination de duals topologiques.

209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications. Le programme offre aux candidates et candidats plusieurs pistes très riches pour nourrir cette leçon d'applications significatives : l'approximation uniforme par des polynômes algébriques ou trigonométriques, la régularisation par convolution. Mais on peut également penser à l'approximation des fonctions intégrables sur la droite réelle par des fonctions continues ou plus régulières à support compact.

Les séries de Fourier s'intègrent parfaitement à cette leçon, avec le théorème de Fejér (dans ses versions $L^p(\mathbf{T})$ ou $C(\mathbf{T})$) et ses applications, par exemple à la construction de bases hilbertiennes d'exponentielles complexes dans $L^2(\mathbf{T})$ et ses conséquences.

Voici enfin quelques pistes à réserver aux candidates et candidats solides : le théorème de Runge en analyse complexe, le théorème taubérien de Littlewood, l'unicité de la meilleure approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d, les liens entre la régularité et la qualité de l'approximation par des polynômes (algébriques ou trigonométriques) voire des fonctions rationnelles, l'approximation uniforme par des fonctions lipschitziennes.

213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

La théorie des espaces de Hilbert est riche. Les propriétes algébriques fondamentales, l'utilisation de la complétude et la projection orthogonale sur les convexes fermés (en particulier les sous-espaces vectoriels fermés) doivent être bien comprises.

L'analyse de Fourier, sur le cercle où la droite réelle, est évidemment une illustration fondamentale des résultats de cette leçon. Le jury a noté que la théorie L^2 des séries de Fourier n'était pas souvent maîtrisée.

Les concepts de famille orthonormée et de base hilbertienne constituent une source abondante d'applications. Le fait que les polynômes constituent une base hilbertienne de l'espace des fonctions de carré intégrable relativement à certains poids est présenté quasi systématiquement en développement. Peut-être faudrait-il songer à trouver d'autres sources d'inspiration, d'autant que la preuve et en déduire une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{R})$ ne sont pas parfaitement compris.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux propriétés spectrales des opérateurs autoadjoints compacts d'un espace de Hilbert, à la minimisation de fonctionnelles convexes et coercives sur un espace de Hilbert, ou encore au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de $L^2(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, ou encore au théorème d'échantillonnage de Shannon.

214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

Les deux théorèmes fondamentaux auxquels cette leçon est consacrée offrent une belle utilisation de la complétude, qu'il conviendra d'évoquer. La démonstration de l'un de ces deux théorèmes peut parfaitement faire l'objet d'un des deux développements. On pourra par exemple mettre en pratique, sur des exemples bien choisis, le théorème des fonctions implicites au moins dans le cas de deux variables réelles, pour enrichir le plan avec profit.

Des applications significatives aussi bien en analyse qu'en géométrie sont attendues : problèmes d'optimisation sous contraintes (inégalité de Hölder, inégalité d'Hadamard, etc), régularité des racines d'un polynôme en fonction des coefficients, etc.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange a bien évidemment toute sa place dans cette leçon, à condition qu'elle soit illustrée par des exemples. L'interprétation de l'énoncé en termes d'espace tangent est visuellement éclairante et permet d'éviter les éventuelles confusions résultant de raisonnements purement matriciels.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à l'étude locale d'applications suffisamment régulières (submersions, immersions, théorème du rang constant, lemme de Morse), au lemme de Sard, ainsi qu'aux sous-variétés de $\mathbf{R}^n$.

215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

L'idée de départ de cette leçon est qu'une fonction suffisamment régulière se comporte localement comme une application linéaire. De nombreuses différentielles usuelles (notamment issues de l'algèbre linéaire) peuvent ainsi être obtenues en calculant directement un développement limité. Des exemples significatifs en dimension 2 et 3 pourront venir illustrer la différence fondamentale avec la dimension 1. Les dérivées partielles — lorsqu'elles existent — pourront clarifier l'expression de nombreuses différentielles ainsi que la règle de la chaîne.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser la notion de différentielle seconde pour les fonctions de classe C^2, à la différentielle de l'exponentielle matricielle, ainsi qu'aux points où celle-ci est un difféomorphisme local, aux fonctions harmoniques et à leurs propriétés élémentaires, à la caractérisation des fonctions holomorphes et son interprétation géométrique.

Pour ce qui concerne les applications, de nombreux thèmes relatifs aux leçons 214 ou 219 sont ici appropriés.

218 : Formules de Taylor. Exemples et applications.

La connaissance des différentes formules de Taylor, en une, ou plusieurs variables, de leurs différences et de leurs champs d'applications, allant de la géométrie (par exemple la position d'une courbe ou une surface par rapport à son espace tangent) jusqu'aux probabilités (comme par exemple le théorème central limite), doit constituer le cœur de la leçon. Les énoncés devront être illustrés par des exemples pertinents. En général, le développement de Taylor d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Cette analyse impose une bonne compréhension des relations de comparaison (notamment o et O).

Le jury s'attend à ce que le lien entre l'existence d'un développement limité à un ordre n et l'existence d'une dérivée n-ième soit connu. On peut aussi montrer comment les formules de Taylor permettent d'établir le caractère développable en série entière (ou analytique) d'une fonction dont on contrôle les dérivées successives.

Pour les candidates et candidats solides, on peut mentionner des applications comme le lemme de Morse, l'étude locale au voisinage des points stationnaires pour les courbes et des points critiques pour la recherche d'extrema. On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités contrôlant les dérivées intermédiaires lorsque f et sa dérivée n-ième sont bornées, ou encore à l'analyse de méthodes d'intégration numérique.

219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Cette leçon offre aux candidates et candidats une multitude d'approches possibles : utilisation de la topologie, du calcul différentiel, de la convexité (fonctions convexes, projection sur un convexe fermé et leurs multiples applications), de l'holomorphie.

Les candidates et candidats peuvent proposer des problèmes d'optimisation sous contraintes, si possible autres que la preuve de l'inégalité arithmético-géométrique. À ce sujet, une bonne compréhension de la méthode des multiplicateurs de Lagrange requiert celle de la notion d'espace tangent, qui en donne une justification beaucoup plus claire que certains raisonnements purement matriciels.

Les algorithmes de recherche d'extremums ont également leur place dans cette leçon (méthode de Newton, du gradient à pas optimal, problème des moindres carrés, etc).

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux diverses versions du principe du maximum (fonctions holomorphes ou harmoniques, équations aux dérivées partielles), au calcul des variations, ou réfléchir à l'unicité de la meilleure approximation dans divers espaces fonctionnels, à commencer par celle des fonctions continues sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d.

220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

La théorie de Cauchy-Lipschitz non linéaire est le fondement de cette leçon, et comporte plusieurs points importants : passage du local au global, phénomènes d'explosion en temps fini, etc. La leçon étant orientée vers l'étude d'exemples, il convient d'éviter cependant de consacrer une trop large portion du plan à des théorèmes généraux.

Le nombre des exemples proposés aura avantage à être restreint : il ne s'agit pas de présenter une longue compilation d'exemples à peine effleurés, mais d'en analyser avec soin un petit nombre, choisis pour leur intérêt et dans un souci d'illustrer des méthodes variées.

Des exemples de résolutions explicites peuvent bien sûr être proposés, mais l'intitulé appelle également des études qualitatives d'équations différentielles non linéaires d'ordre 1 ou 2, par exemple l'étude qualitative de systèmes autonomes plans.

Il est important d'avoir compris comment l'étude d'une équation d'ordre 2 se ramène à celle d'un système différentiel d'ordre 1.

Dans les exemples d'études proposés, on a tout intérêt à faire des dessins (portrait de phase par exemple) et à mettre en évidence l'utilisation d'éléments géométriques pour construire l'allure des trajectoires : symétries, champs de vecteurs, points d'équilibre, barrières, isoclines, intégrales premières.

Les candidates et candidats solides pourront s'intéresser au problème de linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre ou au théorème de Poincaré-Bendixson.

221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

La théorie de Cauchy-Lipschitz linéaire est une porte d'entrée naturelle pour cette leçon. La complétude (via la méthode des approximations successives) y joue un rôle crucial, et la preuve est un exemple fondamental d'intervention de la dimension finie en analyse. Sans que cet aspect devienne trop prépondérant, les candidates et candidats peuvent proposer quelques exemples de résolutions explicites : cas scalaire d'ordre un qui fait intervenir des outils élémentaires, cas des coefficients constants avec l'exponentielle de matrice (qui mobilise fortement la réduction des endomorphismes), utilisation de séries entières ou de séries de Fourier, variation des constantes, etc. On se gardera d'aborder des théorèmes généraux s'appliquant au cas non linéaire qui sont réservés à la leçon 220.

Même dans le cadre linéaire, les études qualitatives présentent un grand intérêt et fournissent de nombreuses possibilités : étude du comportement asymptotique des solutions (pour lequel le lemme de Grönwall est un outil d'une grande efficacité), de la distribution des zéros, du Wronskien, etc.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la linéarisation d'équations non linéaires au voisinage d'un point d'équilibre, proposer des exem-ples de problèmes aux limites (théorie de Sturm-Liouville) ou d'études d'équations aux dérivées partielles linéaires.

223 : Suites réelles et complexes. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

L'utilisation des valeurs d'adhérence pour montrer des convergences ou des continuités, ainsi que celle des limites inférieures et supérieures d'une suite réelle (qui permettent des rédactions expurgées d'epsilons superflus) sont des thèmes centraux. Le théorème de Bolzano-Weierstrass ainsi que celui de Cesàro, que les candidates et candidats doivent savoir démontrer, sont incontournables dans cette leçon.

Sans se limiter aux cas convergents, on peut également présenter des exemples d'études asymptotiques de suites définies par des sommes ou des relations de récurrence, voire implicitement.

D'autres pistes, comme les différentes méthodes d'approximation des réels par des irrationnels, la résolution numérique d'équations et leur vitesse de convergence peuvent être explorées.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser par exemple à l'équirépartition, à l'étude de systèmes dynamiques discrets, à l'accélération de la convergence, aux procédés de sommation des séries divergentes et aux théorèmes taubériens qui en découlent.

224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Cette leçon est exclusivement consacrée à des exemples : on n'attend aucun exposé systématique sur les notions de développement asymptotique ou d'échelle de comparaison. Une certaine aisance dans la manipulation des relations de comparaison est attendue dans cette leçon. Presque toutes les parties du programme peuvent être mises à contribution : suites définies par une relation de récurrence ou implicitement, estimation asymptotique de sommes partielles ou de restes, fonctions définies par une série ou une intégrale (comportement de la fonction ζ au voisinage de 1 ou du logarithme intégral au voisinage de $+\infty$, méthode de Laplace ou de la phase stationnaire notamment), mais aussi solutions d'équations différentielles dont on peut étudier le comportement à l'infini ou la distribution des zéros.

Il ne s'agit pas de présenter un grand nombre d'exemples triviaux, mais quelques exemples significatifs bien choisis et diversifiés, pour lesquels on analysera avec soin les idées essentielles des méthodes utilisées.

Pour les candidates et candidats solides voulant aller plus loin, des exemples de méthodes d'accélération de convergence peuvent être présentées.

226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

L'intitulé de la leçon permet de se placer dans des contextes variés : $\mathbf{R}, \mathbf{R}^n$, voire certains espaces de Banach fonctionnels.

En ce qui concerne le cadre réel, on pourra présenter des exemples d'études asymptotiques (si possible autres que $u_{n+1} = \sin u_n$), étudier l'itération d'une fonction suffisamment régulière au voisinage d'un point fixe ou encore présenter des exemples de méthodes de résolution approchée d'équations. En ce qui concerne l'étude asymptotique des suites récurrentes, le jury souligne le fait que la mise en œuvre d'une analogie discret-continu permet souvent de faire surgir naturellement la suite auxiliaire adaptée.

En se plaçant dans $\mathbf{R}^n$, on peut aborder par exemple l'étude des suites vérifiant une relation de récurrence d'ordre 2 ou plus, la convergence en loi de chaînes de Markov à espace d'états fini, l'extension à ce cadre de la méthode de Newton ou plus généralement les méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires.

Dans le cadre des espaces de Banach, les applications de la méthode des approximations successives ne manquent pas, qu'il s'agisse de la construction de solutions d'équations différentielles, intégrales, ou fonctionnelles.

228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Au delà des définitions et premiers théorèmes, le programme offre de nombreuses pistes aux candidates et candidats pour élaborer leur plan : recherche d'extrema, utilisations de la continuité uniforme, fonctions convexes et leur régularité, approximation par des fonctions régulières, utilisations des formules de Taylor, liens entre caractère C^∞ et analycité, etc.

Des exemples explicites de fonctions continues et nulle part dérivables, de fonctions continues et croissantes à dérivée nulle presque partout, de fonctions C^∞ à dérivées en un point prescrites, etc. sont les bienvenus dans cette leçon.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la dérivabilité des fonctions monotones ou lipschitziennes ou à celle de l'intégrale indéfinie d'une fonction intégrable, proposer diverses applications du théorème de Baire (continuité d'une limite simple de fonctions continues, points de continuité d'une dérivée, généricité des fonctions nulle part dérivables parmi les fonctions continues ou des fonctions nulle part analytiques parmi les fonctions C^∞, etc.)

229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications. Les définitions et premières propriétés liées à ces notions doivent bien sûr être présentées pour pouvoir aborder les questions de limites et de continuité de ces fonctions et leurs caractérisations à l'aide de leurs dérivées. Il convient d'illustrer son exposé par de nombreux dessins.

La convexité est une source inépuisable d'inégalités, dans divers domaines y compris les probabilités. Dans ce même domaine, l'étude des fonctions de répartition de variables aléatoires réelles, fonctions croissantes s'il en est, est une piste intéressante.

Au delà de la dimension 1, les fonctions convexes définies sur une partie convexe de $\mathbf{R}^n$ font partie de cette leçon. La recherche de leurs extrema constitue une thèmatique riche d'exemples.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à des questions de dérivabilité des fonctions monotones, ou de continuité des fonctions convexes définies sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$.

230 : Séries de nombres réels et complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Dans cette leçon, les définitions et premiers exemples de référence sont incontournables. Lorsque des « règles » de convergence sont présentées, celles-ci doivent être illustrées d'exemples consistants.

Le sujet ne se limite pas à la seule étude de la convergence d'une série, l'estimation des sommes partielles ou des restes (où la technique de comparaison entre somme et intégrale, en présence ou non de monotonie, est particulièrement efficace), et ses conséquences (comme l'étude asymptotique de certaines suites récurrentes) font partie intégrante du sujet.

L'utilisation de séries entières ou de séries de Fourier pour calculer la somme de certaines séries, le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire discrète fournissent également de riches thèmes d'étude.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à quelques procédés de sommation des séries divergentes (qui interviennent naturellement dans la théorie des séries de Fourier, entre autres) ainsi qu'aux théorèmes taubériens qui s'y rapportent.

234 : Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables. Cette leçon est orientée vers l'étude et l'utilisation des espaces L^1 (voire L^p) associés à la mesure de Lebesgue (supposée construite) sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^n$, voire à d'autres mesures.

Les grands théorèmes de la théorie (permutations limite-intégrale, Fubini, etc.) sont évidemment incontournables et la proposition systématique d'exemples d'application significatifs doit enrichir ce déroulé.

Le thème de l'approximation (approximation des fonctions intégrables par des fonctions continues à support compact, utilisation de la convolution) fournit de nombreuses applications, ainsi que celui de l'analyse de Fourier sur le cercle ou la droite réelle.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la transformée de Fourier sur L^2, la dualité entre L^p ($1 \leqslant p < \infty$), les liens entre intégration et dérivation, les procédés de sommation presque partout des séries de Fourier, l'algèbre de convolution L^1, l'étude des parties compactes de L^p, etc.

235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse. L'intitulé de cette leçon de synthèse doit permettre d'aborder explicitement des problèmes variés de permutations de symboles, qu'il s'agisse de limites, d'intégrales, de dérivées, d'espérances ou d'autres opérations.

Les candidates et candidats peuvent également inclure dans leur leçon des exemples de permutations de quantificateurs, obtenus par des arguments de compacité (voire, pour les candidates et candidats solides, utilisant le théorème de Baire).

La présentation des thématiques abordées doit être ordonnée rationnellement et illustrée systématiquement d'exemples significatifs.

236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Les exemples proposés par les candidates et candidats doivent mettre en œuvre des techniques diversifiées : méthodes élémentaires, intégrales dépendant d'un paramètre, utilisation de la formule des résidus, de sommes de Riemann, voire de la transformée de Fourier dans L^1 ou L^2.

Il est attendu par le jury quelques exemples significatifs de calculs d'intégrales multiples (utilisation du théorème de Fubini, de changements de variables, etc.).

Les résultats d'analyse ou de théorie des probabilités dont la preuve utilise crucialement un calcul spécifique d'intégrale, (à pur titre indicatif, celle du théorème d'inversion de Fourier basée sur la transformée de Fourier d'une gaussienne) peuvent constituer de bonnes sources de développements.

Il est enfin possible de proposer une ou deux méthodes pertinentes de calcul approché d'intégrales.

239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Le programme fournit aux candidates et candidats de multiples pistes pour élaborer leur plan à commencer par les théorèmes de régularité usuels (allant jusqu'à inclure pour les plus solides celui d'holomorphie sous le signe somme). Ces résultats doivent être présentés dans un ordre rationnel et illustrés par des exemples et contre-exemples significatifs.

Convolutions et transformées de Fourier font naturellement partie de ces exemples, les candidates et candidats peuvent également s'intéresser aux fonctions caractéristiques en théorie des probabilités, à la transformée de Laplace ou à certaines fonctions «spéciales» définies par une intégrale. Les techniques d'études asymptotiques de fonctions définies par des intégrales font partie intégrante de cette leçon.

241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

L'étude des différents modes de convergence et leur utilisation ne doit pas donner lieu à un catalogue formel de théorèmes, mais être illustrée par des exemples significatifs et diversifiés.

Les fonctions « spéciales » définies par une série sont légion et fournissent aux candidates et candidats de multiples possibilités, sans éluder le champ complexe qui leur confère souvent leur pleine signification. Des exemples de sommes de séries continues nulle part dérivables ou croissantes non constantes et à dérivée nulle presque partout pourront également être proposés.

Les candidates et candidats peuvent aborder les séries entières (qui ont des applications combinatoires pouvant donner lieu à des études asymptotiques intéressantes), les fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières ou les séries de Fourier. Il est préférable, dans ce cas, de présenter quelques applications significatives plutôt qu'un cours formel.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à l'étude des séries de variables aléatoires indépendantes, la formule sommatoire de Poisson et ses applications aux fonctions spéciales - comme la fonction θ de Jacobi -, la théorie des séries de Dirichlet et ses utilisations en théorie des nombres.

243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de définitions, règles et propriétés accompagnées de quelques exemples triviaux. Le problème du domaine et les modes de convergence doivent être abordés.

Les liens entre l'holomorphie et l'analyticité doivent être maîtrisés. L'existence de nombreux développements en série entière peut être établie de manière immédiate par cet argument, avec en prime une information sur le rayon de convergence, voire sur l'ordre de grandeur des coefficients.

Le théorème radial (ou non-tangentiel) d'Abel est souvent proposé comme développement, en pensant qu'il s'agit d'un théorème de prolongement, alors qu'il s'agit d'un résultat de continuité. En réalité, ce théorème débouche naturellement sur la question plus générale des procédés de sommation des séries divergentes.

Les séries entières ont également des applications combinatoires pouvant donner lieu à des études asymptotiques très intéressantes. Les fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières ont également toute leur place dans cette leçon.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux théorèmes taubériens relatifs aux séries entières, au problème du prolongement analytique de la somme d'une série entière, aux séries entières aléatoires ou encore aux fonctions C^∞ nulle part analytiques.

245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.

Les fondements de la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe contenues dans le programme fournissent un ample matériel pour nourrir cette leçon : représentation intégrale ou sous forme de série entière, principe des zéros isolés et ses conséquences, principe du maximum. L'un des deux développements proposés peut être consacré à la preuve d'un de ces résultats fondamentaux.

Les candidates et candidats doivent être capables de donner la définition d'une fonction méromorphe, et d'en présenter les applications du programme : développements en série de Laurent et formule des résidus, illustrés par des exemples significatifs.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder par exemple les théorèmes de Rouché ou de Hurwitz, l'étude des zéros des fonctions holomorphes, la représentation sous forme de produit infini, le problème de la représentation conforme, le théorème de Paley-Wiener, les espaces de Hardy sur le disque unité, le problème du prolongement analytique, l'équation fonctionnelle de la fonction ζ et ses conséquences, les algèbres de Banach, etc.

246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

Les théorèmes de convergence des séries de Fourier ont une place centrale dans cette leçon ; on prendra garde à différencier les hypothèses et à maîtriser les différents types de convergence (simple, uniforme, au sens de Cesáro, L^p...) apparaissant dans les énoncés proposés. Les propriétés importantes des noyaux utilisés pour les preuves de ces résultats doivent être clairement explicitées.

La théorie L^2 permet un point de vue géométrique agréable de la théorie. Dans ce cadre, on aura en tête l'interprétation de l'identité de Parseval en terme d'isométrie.

Les propriétés des coefficients de Fourier sont un incontournable de la leçon, mais ne devront pas prendre une place prépondérante. Les candidates et candidats pourront aborder le lien entre régularité de la fonction et vitesse de convergence vers 0 de ses coefficients de Fourier, via le théorème de Riemann-Lebesgue et le lien entre dérivation et coefficients.

Il est important d'illustrer cette leçon de quelques unes des innombrables applications des séries de Fourier, par exemple : calculs de sommes de séries, résolutions d'équations différentielles ou aux dérivées partielles (équation de la chaleur, problème de Dirichlet sur le disque unité, etc.), inégalité de Bernstein, formule sommatoire de Poisson et ses applications, inégalité de Wirtinger, etc.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la divergence des séries de Fourier dans divers contextes (soit en exhibant des contre-exemples, soit en utilisant la théorie de Baire), mais aussi aux procédés de sommation presque partout des séries de Fourier, aux séries de Fourier lacunaires, à l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, au critère de Weyl, à l'inégalité isopérimétrique, à la convergence de la série de Fourier d'une fonction α-höldérienne pour $\alpha > \frac{1}{2}$, etc.

250 : Transformation de Fourier. Applications.

Cette leçon est consacrée à l'analyse de Fourier sur la droite réelle. Au niveau de l'agrégation, elle peut être abordée dans trois cadres : L^1, classe de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide, ou L^2. Les deux derniers cadres sont les plus satisfaisants du point de vue de la symétrie obtenue, le dernier étant le plus délicat.

La leçon nécessite de rappeler le lien avec le produit de convolution. Elle doit aussi être illustrée par quelques applications significatives : formule sommatoire de Poisson et ses applications, résolution d'équations aux dérivées partielles, etc. Par ailleurs, les fonctions caractéristiques et leurs applications en probabilités ont toute leur place dans cette leçon.

Proposer comme développement le théorème d'échantillonage de Shannon est pertinent, à condition d'avoir bien compris qu'il traduit une isométrie entre deux espaces de Hilbert.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux vecteurs propres de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbf{R})$, à la non-dérivabilité de la fonction de Weierstrass dans le cas le plus général, à l'algèbre de convolution $L^1(\mathbf{R})$, au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de $L^2(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, aux principes d'incertitude, etc.

253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

La convexité intervient dans plusieurs parties du programme, offrant ainsi plusieurs pistes très riches pour élaborer la leçon : convexité dans les espaces vectoriels réels, fonctions convexes (d'une ou plusieurs variables réelles), caractérisation parmi les fonctions C^1 ou C^2 sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$, projection sur un convexe fermé d'un espace de Hilbert, méthodes d'optimisation en dimension finie. Les applications de ces thèmes sont innombrables : inégalités classiques en analyse et en probabilité, optimisation, critère de densité d'un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert, etc.

Il est important de développer cette leçon dans son cadre géométrique naturel, en n'hésitant pas à l'illustrer par de nombreux dessins.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la continuité, voire à la différentiabilité d'une fonction convexe définie sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$, aux points extrémaux d'une partie convexe d'un espace vectoriel réel de dimension finie, à la minimisation de fonctionnelles convexes et coercives sur un espace de Hilbert, aux applications du théorème de Hahn-Banach, à la notion d'uniforme convexité et son application à l'existence d'un vecteur normant pour une forme linéaire continue.

261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications. Cette leçon concerne les diverses lois du programme, leurs interactions et leurs propriétés de stabilité, et appelle donc quelques illustrations concrètes et bien choisies de calculs de lois, dans un contexte de modélisation. Le théorème de transfert, qui calcule $\mathbf{E}(f(X))$ à l'aide de la loi de X, les vecteurs aléatoires à coordonnées indépendantes, ainsi que la caractérisation de la loi par la fonction de répartition, fonction génératrice ou caractéristique, sont au cœur de cette leçon. Les principales propriétés des fonctions de répartition et des fonctions caractéristiques des variables aléatoires réelles doivent être connues.

Les candidates et candidats peuvent également aborder la convergence en loi en l'illustrant d'exemples et d'applications variés en probabilités et/ou en statistique (estimation par intervalle de confiance).

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la caractérisation de la loi par les moments, à des inégalités de concentration, aux vecteurs gaussiens, au théorème central limite dans $\mathbf{R}^d$, aux chaînes de Markov, aux processus de Poisson.

262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications. Les liens entre les différents modes de convergence d'une suite de variables aléatoires doivent être illustrés par des exemples et contre-exemples variés. Ainsi, les implications entre les divers modes de convergence, et les réciproques partielles doivent être connues. Les théorèmes de convergence du programme (lois des grands nombres, théorème central limite) sont bien sûr au cœur de cette leçon, et la preuve de la loi forte des grands nombres, éventuellement sous des hypothèses de confort, peut être présentée. Les liens de ces théorèmes limite avec les questions d'estimation ponctuelle, d'estimation par intervalle de confiance en statistique, ont leur place dans cette leçon.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, les marches aléatoires, la loi du logarithme itéré, la méthode de Monte Carlo, le théorème central limite dans $\mathbf{R}^d$, les chaînes de Markov, les lois stables ou infiniment divisibles.

264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Le jury attend des candidates et candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles du programme soient présentées, ainsi que leurs liens éventuels. Il est important de proposer quelques exemples de modélisation faisant intervenir ces lois. Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières (caractérisation de la convergence en loi, notion de fonction génératrice) doivent être mises en évidence et illustrées par des exemples variés. La marche aléatoire symétrique sur $\mathbf{Z}$ ou le processus de Galton-Watson fournissent des exemples riches.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder la loi du logarithme itéré (par exemple dans le cas de la marche aléatoire symétrique), les chaînes de Markov, les processus de Poisson.

266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

Il s'agit d'une leçon de synthèse autour de l'indépendance, concept incontournable qui démarque la théorie des probabilités de celle de l'intégration. Les notions importantes de probabilité conditionnelle, d'indépendance de deux événements, d'indépendance mutuelle d'une suite d'événements et d'indépendance de familles de variables aléatoires, doivent être connues.

Le programme fournit plusieurs utilisations élémentaires de l'indépendance : lien avec l'espérance, la variance, la covariance et le coefficient de corrélation, loi faible des grands nombres, lemmes de Borel-Cantelli, stabilité de certaines lois, en lien avec les fonctions génératrices et caractéristiques. Des thèmes pouvant également être abordés sont le théorème central limite, ou l'étude de la marche aléatoire symétrique sur $\mathbf{Z}$.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder la loi forte des grands nombres, l'indépendance d'une suite de tribus, la loi du 0-1 de Kolmogorov, la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, les vecteurs gaussiens ou le théorème de Cochran.

Chapitre 5

Épreuves orales de modélisation

5.1 Présentation des épreuves de Modélisation

Lors de l'inscription au concours, trois options sont proposées :

A. Probabilités et Statistiques,

B. Calcul scientifique,

C. Algèbre et Calcul formel.

L'épreuve de modélisation est composée d'une première période de préparation de quatre heures et d'une seconde période d'interrogation d'une heure, elle-même subdivisée en un exposé de 35 minutes et d'un échange avec le jury de 25 minutes. Ces modalités s'appliqueront encore pour la session 2026. Les candidats commencent par tirer au sort un couple de textes. Le candidat a accès aux deux textes durant sa préparation et il est libre de choisir celui qu'il souhaite étudier et présenter durant la période d'interrogation.

Cette épreuve permet aux candidats de mettre en avant diverses qualités : les connaissances mathématiques, leur mise en perspective, l'aptitude à les appliquer à des problèmes concrets de modélisation, la réflexion, la pertinence des illustrations informatiques, les qualités pédagogiques de mise en forme d'un exposé construit et cohérent, la capacité à faire preuve d'initiative pour s'exprimer et manifester des qualités pédagogiques et de synthèse. L'aptitude des candidats à répondre aux questions fait partie intégrante de l'évaluation de cette épreuve. Comme pour l'ensemble des oraux, les exposés dynamiques et vivants sont particulièrement appréciés.

5.1.1 Textes

L'épreuve de modélisation repose sur l'exploitation d'un texte d'environ 5 à 6 pages que les candidats choisissent parmi les deux qui leur sont proposés lors du tirage et qu'ils pourront consulter en ligne dans la salle de préparation.

Le texte fourni est la base pour construire et exposer un traitement mathématique d'un problème « concret » en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, disséminés dans le texte. Les candidats doivent utiliser leurs connaissances mathématiques pour justifier les points de leur choix parmi ceux évoqués dans le texte, proposer un retour sur la problématique étudiée ainsi qu'une conclusion. Les textes peuvent présenter des arguments rapides, voire heuristiques, qui sont dans ce cas signalés comme tels, mais ils ne contiennent pas d'assertion délibérément trompeuse et se concluent par une liste de suggestions. Les principaux attendus de l'épreuve sont rappelés dans un bandeau surmontant chaque texte.

Même si la plupart des textes s'appuient sur des problématiques issues de sciences autres que les mathématiques, aucune connaissance dans ces domaines n'est exigée par le jury. Discuter la modélisation proposée par un texte consiste donc avant tout à dégager les comportements qualitatifs du modèle, la manière dont il dépend d'éventuels paramètres et s'il semble apte à rendre compte des phénomènes qu'il est censé représenter. Toutefois, le jury s'attend à ce que les candidats ne se contentent pas d'un exposé intégralement qualitatif et démontrent certains résultats évoqués dans le texte ; il apprécie particulièrement, sans toutefois l'exiger, qu'un candidat montre sa compréhension du modèle en exhibant par exemple les conséquences d'une variation de paramètres ou de données, notamment dans l'illustration informatique. *A contrario*, des interprétations qualitatives du comportement des modèles sont trop souvent absentes des exposés. Pourtant, montrer que l'on comprend un modèle ne se réduit pas à prouver un théorème, et nécessite d'exposer des expérimentations informatiques à fin d'illustration.

Des textes qui ont été rendus publics sont disponibles sur le site de l'agrégation de mathématiques https://agreg.org. Ces textes sont représentatifs de l'épreuve et permettent aux candidats de se familiariser avec le format des textes, de se faire une idée des attentes du jury et de réfléchir à des illustrations numériques pertinentes dans le cadre du texte.

5.1.2 Période de préparation

Durant les quatre heures de préparation, les candidats ont accès à une bibliothèque numérique et disposent d'un ordinateur dont la configuration est décrite sur le site de l'agrégation de mathématiques, à l'adresse https://agreg.org. Les candidats retrouveront le même environnement sur l'ordinateur de la salle d'interrogation. Il n'est évidemment pas réaliste de découvrir les logiciels à disposition des candidats le jour de l'épreuve : la configuration informatique utilisée pour le concours et sa documentation sont accessibles et téléchargeables depuis le site https://agreg.org et permettent de se familiariser avec l'environnement offert lors de l'épreuve. Durant la période de préparation, les candidats peuvent également utiliser leurs propres ouvrages, dans les mêmes conditions que pour les épreuves de leçons.

Il est instamment demandé aux candidats de ne pas écrire sur le texte imprimé qui leur est distribué car il est destiné à être utilisé à nouveau pendant la session.

Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur le discours qu'ils tiendront, sur l'exploitation du tableau, sur l'utilisation de l'outil informatique et sur le temps qu'ils vont consacrer à chacune des parties de leur plan, ce qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. Proposer un exposé structuré et cohérent ne peut s'improviser au moment de l'oral et doit faire l'objet d'une réflexion préalable durant la préparation. Il est également conseillé aux candidats de consacrer quelques minutes à la fin de leur préparation à une prise de recul sur leur plan. Ce dernier est un élément important pour le jury, qui pourra, en s'y référant, aider les candidats dans leur gestion du temps de l'exposé, notamment en leur rappelant, si ce n'est fait avant les dernières minutes, que l'illustration informatique doit être présentée au cours de la présentation et non pendant le temps d'échange.

5.1.3 Période d'interrogation

Au début de l'interrogation, le jury rappelle les modalités de l'épreuve, puis invite les candidats à vérifier que les fichiers qu'ils ont créés lors de la préparation ont bien été transférés sur la machine servant pour l'épreuve (dont l'environnement est identique à celui de la salle de préparation). La période d'interrogation dure une heure et est scindée en deux temps : un exposé de 35 minutes maximum suivi d'échanges avec le jury jusqu'à la fin de l'heure impartie.

Exposé. Les candidats ont la recommandation de commencer par donner la structure de leur présentation sous forme d'un plan et le déroulement de l'exposé doit être en cohérence avec cette structure.

Grâce à ce plan, le jury pourra ainsi avoir une vision globale de l'exposé et aider, si besoin, les candidats à gérer leur temps. Comme les candidats se le voient rappeler en début d'épreuve, l'exposé doit être accessible à un public qui découvre les problématiques du texte et doit permettre d'en faire comprendre les enjeux à un public qui ne le connaîtrait pas. Ainsi, le jury n'est pas censé connaître le texte présenté par le candidat, mais chaque membre dispose néanmoins d'un exemplaire papier, afin que les candidats puissent y faire référence pour éviter de recopier les notations, les énoncés complets ou certaines formules. Le jury, tout en étant conscient des difficultés du concours, attend un minimum d'aisance au tableau, la manifestation d'une certaine volonté de capter l'attention de l'auditoire et un discours clair et précis.

Durant l'exposé, les candidats disposent de leurs notes, d'un tableau et d'un ordinateur. Ils peuvent alterner, quand bon leur semble, entre un exposé oral, quelques éléments rédigés au tableau de façon propre et lisible et la présentation de ce qui a été préparé à l'aide de l'outil informatique. Les candidats doivent gérer correctement le tableau et demander, si besoin, au jury les parties qu'ils peuvent effacer, ce dernier pouvant souhaiter conserver certains passages et y revenir lors des échanges avec les candidats. Même si les programmes informatiques ne fonctionnent pas comme ils l'auraient souhaité ou si les simulations numériques n'ont pas abouti, les candidats sont invités à expliquer ce qu'ils voulaient mettre en œuvre, illustrer ou programmer. Si, lors de la phase d'exposé, les candidats n'ont pas du tout utilisé l'ordinateur dix minutes avant la fin du temps qui leur est imparti, le jury les en alertera.

Comme dans tout oral, la construction de l'exposé doit être une préoccupation importante des candidats : l'exposé doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions, mise en lumière des connaissances. Une réflexion s'impose afin de produire un tout cohérent et intelligible par un public qui, dans l'esprit de l'épreuve, découvre le texte à travers l'exposé des candidats.

Les candidats sont libres de la gestion de leur exposé : il n'y a pas de « format type » pour cette épreuve. Sur un même texte, des formats très différents de prestation ont été valorisés : certains s'éloignant du découpage opéré par le texte et arrangeant les éléments autrement ; d'autres présentant un survol du problème, de la méthode et des résultats obtenus avant de détailler des aspects plus mathématiques ; d'autres au contraire suivant de près la progression du texte mais en y apportant les éclairages et les illustrations nécessaires. De bons exposés ont parfois choisi d'aller loin dans le texte pour en décrire la dynamique globale et l'aboutissement (quitte à ne pas traiter toutes les démonstrations) ; d'autres exposés, tout aussi bons, ont traité un passage plus limité du texte mais de manière détaillée et en fournissant tous les arguments pertinents.

Le jury est sensible à l'honnêteté du discours. Tenter de faire semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un passage du texte est pénalisé. Un regard critique (« il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire », « les hypothèses du théorème de XXX que je connais pour aborder des problèmes similaires ne sont pas satisfaites dans le cas présent »...) est une attitude bien plus payante.

Échanges avec le jury. Durant 25 minutes, le jury revient sur certains propos des candidats qui méritent précision. Il peut demander un énoncé précis d'un théorème utilisé pour démontrer une assertion ou des éléments de démonstration d'un résultat énoncé par les candidats. Les échanges peuvent également porter sur la modélisation ou les illustrations informatiques.

5.2 Recommandations du jury communes aux trois options

5.2.1 Organisation de l'exposé

L'exercice de l'exposé en temps limité nécessite un certain entraînement. Il est malheureusement fréquent de voir des exposés un peu trop lents pendant les 20 à 25 premières minutes qui accélèrent brutalement dans les 10 dernières minutes et que les candidats peinent à conclure dans le temps imparti.

La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer : il vaut mieux indiquer les étapes cruciales d'un raisonnement que de se lancer dans un long calcul fastidieux qu'on aura du mal à mener à bien et à mettre en valeur. Il ne faut pas négliger la conclusion de l'exposé : cette étape finale est le moment opportun pour revenir sur les problématiques soulevées par le texte.

Par ailleurs, si le jury sanctionne un exposé significativement trop bref, la démarche consistant à « jouer la montre » est encore plus sévèrement pénalisée. Utiliser une portion excessive du temps de parole pour recycler un chapitre de cours ou un développement d'une leçon d'Analyse et Probabilités ou d'Algèbre et Géométrie, en s'éloignant des enjeux du texte, est considéré comme un hors sujet et est sévèrement sanctionné. De même, il est inutile de perdre du temps à recopier la totalité du texte au tableau : chaque membre du jury dispose d'un exemplaire du texte. Enfin, l'aspect pédagogique de l'exposé, même si le texte n'est restitué que partiellement mènera à une note bien plus élevée qu'un catalogue de type paraphrase.

Une brève introduction à la problématique avant de s'engager dans une longue digression sans lien avec le problème de départ ne peut conduire à une prestation jugée comme satisfaisante et sera sanctionnée par le jury. De même, un exposé se réduisant à la présentation de la problématique du texte et à des illustrations informatiques, ou à l'énumération linéaire des suggestions proposées par le texte, sans contribution des candidats, ne peut conduire au mieux qu'à un résultat médiocre. Plutôt qu'un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique ou critique scientifique, les candidats doivent préférer traiter le texte de façon partielle mais substantielle et en profondeur, ce qui peut aboutir à une bonne note.

Durant la dernière session, le jury a constaté une augmentation de la proportion de candidats utilisant des expressions familières durant leur période d'interrogation : nous invitons les futurs candidats à soigner le vocabulaire employé devant le jury.

5.2.2 Contenu de l'exposé

Le jury rappelle que, même s'il s'agit d'une épreuve plus appliquée ou moins académique que les deux autres épreuves orales, cela ne dispense en aucun cas les candidats de faire preuve de la rigueur mathématique requise : quand on utilise un théorème, il faut impérativement être capable d'en restituer un jeu d'hypothèses. Par jeu d'hypothèses correct, on entend que le théorème soit vrai et qu'il s'applique effectivement au contexte considéré. Le jury n'attend pas nécessairement un énoncé avec les hypothèses les plus générales possibles.

Le jury regrette de ne pas voir davantage de dessins (soignés) ou schémas explicatifs qui peuvent rendre l'argumentation plus claire et convaincante. La capacité à revenir sur le problème de départ et à conclure quant à l'efficacité de l'approche mathématique proposée pour y répondre est une qualité très appréciée.

Pour enrichir leur propos, les candidats sont invités à mobiliser leurs connaissances sur des aspects variés du programme, en étayant les arguments seulement esquissés dans le texte par des énoncés précis. Il est totalement illusoire de chercher à impressionner le jury par une logorrhée de mots savants : les textes proposés peuvent être discutés en exploitant un bagage technique qui n'utilise pas les éléments les plus sophistiqués du programme. En particulier, le jury ne manque pas de s'attarder sur toute notion amenée par les candidats durant leur présentation et il est toujours dommageable de s'aventurer sur des terrains méconnus. Bien plus qu'une démonstration de virtuosité technique, le jury attend que les candidats montrent leur maîtrise d'énoncés relativement simples « en situation » : c'est là que réside une des difficultés principales de l'épreuve. Nombre de candidats peinent à formaliser précisément des notions de base du programme ou à mettre en œuvre certaines de leurs connaissances.

5.2.3 Illustration informatique

Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, dont les ambitions sont clairement délimitées. Il ne s'agit en aucun cas, et pour aucune des trois options, d'un exercice de programmation. L'objectif est d'être capable d'utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte.

La réalisation de cet objectif constitue une part incompressible de la note finale attribuée à l'épreuve. Une très bonne évaluation peut résulter d'une exploitation judicieuse de programmes simples, reposant largement sur les routines standards des logiciels fournis. La forme et la nature des illustrations proposées n'obéissent à aucun format préétabli. En revanche, elles doivent faire la preuve d'une véritable réflexion scientifique et être agrémentées de commentaires, sur les résultats et les méthodes. En particulier, le choix des jeux de paramètres d'entrée pour leurs codes doit être pertinent. Les illustrations informatiques devraient plus souvent permettre de faire un retour sur la problématique du texte et il convient de commenter les résultats obtenus dans le cadre du modèle proposé par le texte. Des illustrations peuvent mettre en valeur les limites du modèle étudié et le jury apprécie particulièrement que les candidats aient un regard critique sur le texte et ne prennent pas celui-ci pour vérité absolue.

Si un bel effort est produit par la majorité des candidats, un nombre très limité d'entre eux rechignent encore à toucher à l'outil informatique. Cette stratégie, dont on pourrait naïvement penser qu'elle permet de consacrer plus de temps à l'analyse du texte et à la préparation de l'exposé oral, est fortement sanctionnée.

Il est important de se rappeler qu'il s'agit d'une illustration. Les candidats peuvent choisir de présenter leur code, s'ils le souhaitent, mais ils doivent réfléchir à en extraire les points clés ; une présentation exhaustive et linéaire est préjudiciable à l'exposé, car elle risque d'empiéter sur le temps à consacrer à la restitution du texte. Cependant, le jury peut demander des précisions sur un point du code. Dans le cas d'une représentation graphique, il est important de préciser, au moins oralement, ce qui est représenté en abscisses et ordonnées.

Pour finir, le jury est tout à fait conscient de la difficulté de l'utilisation de l'outil informatique en temps limité et en situation de stress. Il reste bienveillant face aux candidats dont les illustrations informatiques n'ont pas abouti au résultat souhaité. Dans une telle situation les candidats sont encouragés à expliquer ce qu'ils ont fait et quel type de résultats ils espéraient obtenir. Le jury sait prendre en compte dans sa notation la démarche suivie lorsqu'elle est clairement argumentée et permettrait, avec des aménagements mineurs, de mettre en évidence des aspects intéressants du texte.

5.3 Option A : Probabilités et Statistiques

5.3.1 Généralités

Les textes proposés pour l'option A abordent des thèmes où les points de vue des probabilités et des statistiques se complètent, en proportions variables. Une préparation homogène sur l'ensemble du programme de l'option est donc attendue et fortement conseillée.

En 2025, le jury est heureux d'observer que de plus en plus de candidats et de candidates choisissent des textes à dominante statistique. On regrette toutefois que ce choix se fasse parfois au détriment des martingales, qui semblent moins maitrisées.

5.3.2 Recommandations spécifiques

Toute étude mathématique d'une situation réelle passe par une étape de modélisation, laquelle implique des choix d'outils et d'hypothèses mathématiques adaptés à l'étude. À titre d'exemple, il est ainsi apprécié de justifier la pertinence d'une hypothèse d'indépendance, du caractère markovien d'une suite de variables aléatoires ou encore du choix des lois de probabilité utilisées dans la modélisation. On pourra citer notamment la loi géométrique qui modélise un premier succès, la loi exponentielle qui reflète une absence de mémoire, la loi normale qui traduit une accumulation de petites erreurs indépendantes ou encore la loi de Poisson dans un contexte d'événements rares. Naturellement, on appréciera que le candidat ou la candidate mène une réflexion critique constructive et argumentée sur les diverses hypothèses du texte et propose éventuellement des améliorations rendant le modèle plus réaliste. Cette discussion pourra reposer sur des illustrations informatiques ou des considérations mathématiques.

Voici maintenant quelques points d'attention au sujet du programme lié à l'option A :

— La **loi des grands nombres** et le **théorème central limite** (attention à la confusion entre variance et écart-type) sont des résultats indispensables, dont les hypothèses exactes doivent être sues, ainsi que les modes de convergence en jeu. Le jury note de nets progrès dans la maitrise de ces résultats en 2025.

— **Convergences de suites de variables aléatoires.** Les définitions, caractérisations et les liens entre les différents modes de convergence (presque-sûre, dans L^p, en probabilité, en loi, etc.) sont des questions fréquemment soulevées et auxquelles les candidates et candidats semblent mieux préparés ces dernières années.

— **Intervalles de confiance.** Cette notion, essentielle dans le cadre de l'estimation d'un paramètre, est de mieux en mieux maîtrisée lors des oraux, particulièrement l'utilisation du lemme de Slutsky pour construire des intervalles de confiance asymptotiques. Toutefois, les questions liées à des modèles spécifiques (loi de Poisson, exponentielle, géométrique, de Bernoulli, etc.) révèlent fréquemment un manque de recul.

— **Estimateurs.** Le vocabulaire (convergence, biais, risque quadratique, etc.) doit être connu et utilisé pour comparer, avec pertinence, des estimateurs d'un même paramètre.

— **Chaînes de Markov.** Le programme inclut les propriétés de Markov, faible et forte. Bien que la version faible soit généralement maitrisée, il est rare d'obtenir un énoncé satisfaisant de la forte, même lorsque la notion de temps d'arrêt semble comprise. Les définitions associées aux chaînes de Markov (états récurrents, irréductibilité, apériodicité) sont relativement bien connues pour cette session 2025. En revanche, leurs liens avec l'existence, l'unicité ou la convergence vers une loi invariante restent trop souvent flous.

— **Vecteurs gaussiens.** Les lacunes sur ce sujet semblent moins fortes cette année. La définition de la matrice de covariance doit être connue, ainsi que la loi image d'un vecteur gaussien par une transformation affine $X \mapsto AX + B$. L'énoncé du théorème de Cochran est généralement su, mais son application concrète pose fréquemment des difficultés.

— **Processus de Poisson.** Le jury a constaté des connaissances très inégales sur cette partie du programme, qui intervient dans de nombreux modèles. Les propriétés de ce processus, l'allure des trajectoires et une idée de la construction (et sa simulation) à partir de variables exponentielles sont à connaître.

— **Tests statistiques.** Le jury a observé moins d'amalgames cette année entre la pratique d'un test et la détermination d'un intervalle de confiance. Deux tests d'ajustement figurent explicitement dans le programme (χ^2 et Kolmogorov-Smirnov). Il faut en connaître le principe, la forme de la statistique, le contexte où ils peuvent être appliqués et, surtout, être capable d'expliquer comment mener concrètement un test. Lorsque la notion de p-valeur est utilisée, elle doit être bien comprise et non pas confondue avec les risques de première ou deuxième espèce.

— **Martingales.** En 2025, c'est probablement le point le moins bien maitrisé. C'est d'autant plus dommage que la portion de programme associée aux martingales est relativement réduite (convergence de martingales, théorèmes d'arrêt) et qu'il s'agit de l'une des seules façons de démontrer efficacement une convergence p.s. vers une variable aléatoire.

5.3.3 Mise en œuvre informatique

Le jury tient à insister sur l'objectif d'illustration ou de visualisation associé aux simulations, qui ne doivent donc pas se limiter à la présentation d'une liste de nombres. Les possibilités d'utilisation de l'outil informatique pour illustrer des résultats probabilistes ou statistiques avec pertinence sont nombreuses, nous ne pouvons pas espérer en dresser une liste exhaustive. Nous donnons ici quelques conseils et les exemples les plus importants.

— Tout tracé devrait être accompagné d'une **légende explicite** à l'adresse du jury. Si c'est un graphe, il est bon d'indiquer ce que représentent les abscisses et les ordonnées.

— Savoir **illustrer une convergence en loi** est indispensable. Deux méthodes sont couramment utilisées : confronter graphiquement un histogramme de copies indépendantes d'une variable donnée X_n (pour n assez grand) à la densité de la loi limite ; ou bien tracer la fonction de répartition empirique et la fonction de répartition limite. Une justification mathématique de la méthode choisie est attendue. Il est ainsi à noter que de trop nombreux candidats ne savent pas expliquer à quoi correspond l'histogramme, ni faire la différence entre un histogramme en fréquence ou en densité. Il faut garder à l'esprit que ces illustrations reposent sur deux convergences bien distinctes : d'une part la convergence en loi qui entraîne la convergence des fonctions de répartition (en tout point de continuité de la fonction limite) et d'autre part le fait que la fonction de répartition empirique approche la fonction de répartition exacte de X_n lorsque l'échantillon est assez grand (en conséquence de la loi forte des grands nombres).

— Les candidats peuvent aussi prendre l'initiative de valider quantitativement une convergence en loi par des **tests statistiques** (χ^2 ou Kolmogorov-Smirnov) en se donnant un risque α (classiquement $\alpha = 0.05$), en définissant une statistique et une région de rejet permettant de conclure. Certaines routines ou modules de logiciels offrent la possibilité de réaliser très rapidement des tests à partir d'un échantillon, et nombre d'entre eux renvoient la p-valeur, déjà évoquée dans ce rapport : celles et ceux qui abordent cette notion doivent s'attendre à des questions à son sujet, et s'y préparer.

— Les chaînes de Markov se prêtent à plusieurs possibilités d'illustrations : **simulation de trajectoires et études de convergence**. Dans des cas simples (marche aléatoire sur trois sites par exemple), on peut se voir demander comment simuler des itérations d'une chaîne à partir de variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$. La convergence presque-sûre de moyennes $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$ et la convergence en loi (ou pas) vers une mesure stationnaire donnent lieu à des illustrations informatiques de choix.

— Lors des tentatives d'illustration de **convergence presque sûre**, notamment pour la loi forte des grands nombres ou les chaînes de Markov, le jury observe fréquemment des courbes anormalement irrégulières. Il faut veiller à construire la trajectoire sans relancer la simulation à partir de zéro à chaque pas de temps.

Le jury rappelle que certains textes sont assortis d'un jeu de données numériques sur lequel les candidats sont invités à mettre en œuvre des illustrations. Cela constitue une réelle plus-value pour l'exposé, appréciée par le jury. Signalons que ces textes sont accompagnés d'une notice expliquant comment charger les données avec les logiciels Python, Scilab, Octave et R, logiciels que le jury estime les mieux adaptés à l'option A. L'utilisation de Python est prédominante.

5.4 Option B : Calcul scientifique

5.4.1 Généralités

Si les modalités et les attentes de cette épreuve semblent connues par une fraction croissante des candidats admissibles, une part d'entre eux ne maîtrisent pas suffisamment les rudiments du programme général intervenant dans les textes. Quelques notions sont centrales pour cette option et reviennent, sous une forme ou une autre, dans un grand nombre de textes. S'exercer à les manipuler et à énoncer les principaux résultats afférents permet d'aborder sereinement les textes proposés. De manière non exhaustive, le jury attend des candidats qu'ils soient en mesure de :

- énoncer le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ et l'appliquer pour des systèmes différentiels simples en citant et vérifiant correctement toutes les hypothèses nécessaires à son utilisation.
- décrire la méthode d'EULER explicite, en formaliser et en analyser les propriétés de convergence.
- décrire des méthodes directes de résolution de systèmes linéaires (pivot de GAUSS, LU), expliquer la notion de conditionnement, proposer des méthodes de recherche d'éléments propres de matrices, analyser et mettre en œuvre la méthode de la puissance.
- analyser et mettre en œuvre la méthode de NEWTON (cas scalaire et vectoriel).
- construire la matrice correspondant à la discrétisation par différences finies de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ sur un segment et en expliquer les propriétés élémentaires.
- énoncer et appliquer le théorème des extrema liés (typiquement pour des problèmes de minimisation de fonctionnelles convexes sur $\mathbb{R}^N$ avec contraintes linéaires), analyser et mettre en œuvre un algorithme du gradient.
- maîtriser les outils d'analyse de FOURIER.
- décrire les méthodes de quadratures classiques et leurs premières propriétés.

Le jury souligne que les textes exploitent ces notions dans leurs versions les plus élémentaires et ne requièrent aucun raffinement technique. Un énoncé précis des théorèmes utilisés par les candidats est exigible. Ces derniers prendront par ailleurs soin de citer des énoncés adaptés à la problématique du texte qu'ils ont choisi plutôt que des résultats trop généraux ou des listes de mots-clefs sans rapport direct avec le texte.

5.4.2 Recommandations spécifiques

Le jury émet les recommandations plus spécifiques suivantes :

- **Quadratures numériques.** L'erreur commise par la méthode des rectangles doit être connue et une preuve élémentaire est exigible des candidats.
- **Analyse des équations différentielles ordinaires et calcul différentiel.** La dérivation de fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, et notamment le calcul de la différentielle des applications linéaires, bilinéaires et des applications composées, ne devrait pas poser de difficulté au niveau de l'agrégation. Les formules de développements de TAYLOR contiennent généralement un terme de reste, dont l'analyse est un point souvent crucial. La lecture de la moindre équation différentielle ordinaire devrait déclencher des automatismes. Par exemple, un texte indiquant « la solution maximale du problème de CAUCHY [...] est définie pour tout temps et reste positive » doit amener à :
  1. énoncer de façon précise un théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ adapté au problème (version linéaire si le problème est linéaire, version globale quand elle s'applique,...) et donner une définition claire de la notion de solution utilisée.
  2. expliquer comment ce théorème s'applique dans le contexte présent, notamment en explicitant la fonction $(t, X) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \mapsto f(t, X) \in \mathbb{R}^n$ qui permet de mettre le problème sous la forme $Y'(t) = f(t, Y(t))$, tout en prenant soin de distinguer la variable vectorielle X et la fonction $Y : t \mapsto Y(t)$.

3. exploiter les critères classiques garantissant la positivité de la solution et sa globalité en temps. Le jury attend des candidats une bonne maîtrise de la notion de solution maximale.

— **Schémas numériques pour les équations différentielles.** Le jury considère la description des schémas d'EULER comme un élément central du programme de l'option B. Les candidats doivent être capables de présenter clairement les principes guidant l'écriture de ces schémas, ainsi que de formaliser et analyser leurs propriétés de convergence, comme de discuter les avantages et inconvénients des méthodes explicites et implicites. Le jury note un effort pour énoncer des définitions claires qui distinguent l'approximation Y_n de l'évaluation $Y(t_n)$, et permettent de relier le nombre de points de discrétisation et le pas Δt. Néanmoins, de nombreux candidats se contentent ensuite de citer les notions de consistance, stabilité et convergence sans les définir rigoureusement, ni les mettre en lien avec les méthodes proposées pour illustrer le texte. La mise en œuvre de ces méthodes peut être l'occasion de discuter des difficultés potentielles liées à la stabilité et aux contraintes portant sur le pas de temps.

— **Equations aux dérivées partielles.** Le jury précise que les textes qui évoquent des problèmes d'équations aux dérivées partielles peuvent être abordés avec des outils rudimentaires et ne nécessitent par exemple *a priori* aucune connaissance sur la théorie des distributions, ni ne réclament de dextérité particulière d'analyse fonctionnelle. Il est néanmoins important de savoir faire la différence entre un problème aux limites et un problème de CAUCHY, et d'utiliser une discrétisation adaptée au type de problème considéré. Le jury s'attend à ce que les matrices associées à la discrétisation de $(-\frac{\partial^2}{\partial x^2})$ par différences finies pour des conditions aux limites classiques (DIRICHLET, NEUMANN, périodiques) soient connues.

— **Algèbre linéaire.** Des lacunes profondes et inquiétantes sont relevées chez certains candidats. Au grand étonnement du jury, les candidats ne font pas toujours le lien entre matrices symétriques et formes quadratiques. Les raisonnements liés à la réduction des matrices peuvent être extrêmement laborieux et les méthodes pratiques de calcul (résolution de systèmes, calcul de puissance et d'exponentielle de matrice, inverse d'une matrice,...) méconnues. La notion de conditionnement est bien souvent trop imprécise et les liens entre rayon spectral et normes matricielles doivent être maîtrisés.

— **Optimisation.** Les théorèmes de base se rapportant aux extrema doivent être connus. On s'attend à ce que les candidats soient capables de préciser des hypothèses suffisantes pour :

1. obtenir l'existence d'un extremum,
2. obtenir l'unicité de cet extremum,
3. caractériser l'extremum (sans contrainte ou avec contraintes d'égalité).

— **Analyse de FOURIER.** Le jury s'étonne que de nombreux candidats aient du mal à préciser les hypothèses de régularité assurant la convergence de la série de FOURIER d'une fonction périodique. Le lien entre la régularité d'une fonction périodique et le comportement asymptotique de ses coefficients de FOURIER doit être connu.

5.4.3 Mise en œuvre informatique

Sans que cela soit nécessairement propre à l'option B, le jury insiste sur le fait qu'il est important de commenter les résultats informatiques (courbes, solutions, erreurs...) obtenus et de les relier au problème de modélisation traité par le texte ou à des résultats mathématiques sous-jacents.

Le jury de l'option B rappelle qu'une illustration réalisée avec les routines de base des logiciels fournis est tout-à-fait satisfaisante si ces routines sont clairement présentées et motivées. Par ailleurs, utiliser une routine de base (par exemple pour résoudre numériquement un système linéaire, pour calculer une valeur approchée d'une intégrale, ou pour déterminer des valeurs approchées d'une solution d'un problème de CAUCHY) ne dispense pas les candidats de savoir décrire, mettre en œuvre et discuter les propriétés des méthodes de base du programme de l'option qui auraient pu être utilisées alternativement.

Les illustrations informatiques doivent être produites par des programmes écrits et présentés par le candidat. Ce dernier doit être capable d'expliquer la structure (boucles, tests, *etc*) et la raison de l'utilisation des instructions (affectations, calculs, routines du langage, *etc*) par exemple si le jury le questionne à ce sujet. Parmi les choix proposés, les langages `Scilab` ou `Python` sont certainement les mieux adaptés à l'esprit de l'épreuve d'option B. Une présentation `libreoffice` ne pourra pas être considérée comme une illustration informatique.

5.5 Option C : Algèbre et Calcul formel

5.5.1 Généralités

La ligne directrice de l'option C est dans un premier temps la recherche de l'effectivité, puis de l'efficacité (souvent en temps, parfois en espace) du calcul algébrique. Cela va des aspects les plus élémentaires (algèbre linéaire, groupes, calcul avec les entiers, les polynômes, les entiers modulo) aux aspects plus avancés (élimination, géométrie effective, codes correcteurs d'erreurs). Si l'option dispose d'un programme spécifique, les textes peuvent traiter de toute notion au programme, en particulier au programme d'algèbre. De fait, il est tout à fait possible qu'un texte parle de réduction d'endomorphismes ou de groupes, même si ces notions ne sont pas mentionnées dans le programme spécifique de l'option.

5.5.2 Recommandations spécifiques

Le programme de l'option est résolument orienté sur les problématiques du calcul algébrique effectif. Lorsqu'un énoncé du texte affirme l'existence d'un objet (scalaire, vecteur, matrice, élément d'un groupe, entier, polynôme, etc...), le jury apprécie lorsque les réflexions suivantes sont menées de façon autonome :

- peut-on calculer cet objet ?
- si oui, par quelle(s) méthodes ?
- ces méthodes sont-elles efficaces ? quel est leur coût ?

Si la démarche reste rare, le jury observe une progression du nombre de candidats et de candidates se saisissant spontanément d'une question de complexité. Cette démarche est perçue très positivement par le jury. Pour prendre un exemple, quand le texte parle de cryptographie, comparer le coût des opérations de chiffrement et déchiffrement du système proposé avec le coût d'une attaque, même naïve, est une initiative intéressante et valorisée. Une telle étude est beaucoup plus à sa place qu'un exposé détaillé du cryptosystème RSA plaqué sur un texte qui n'en parle pas – la mention rapide de ce cryptosystème dans un texte introduisant un système de chiffrement pour comparer des complexités restant bien sûr pertinente. Par ailleurs, dans un contexte cryptographique, le jury souhaite voir disparaître l'utilisation abusive du terme « crypter » en lieu et place du terme « chiffrer ».

Sur les aspects mathématiques et la maîtrise des éléments du programme, les principales observations du jury sont les suivantes.

- **Algorithmes et complexité.** Il s'agit d'un point fondamental de l'option C que l'on ne peut pas négliger lorsque l'on présente le concours de l'agrégation. Il est malheureusement encore trop rare de voir des analyses spontanées de complexité d'algorithme pendant un exposé. Le jury observe toutefois une progression des connaissances dans ce domaine même si certains points restent méconnus :

  - si l'algorithme d'EUCLIDE est bien connu, les relations de BÉZOUT ne sont obtenues qu'en effectuant l'algorithme d'EUCLIDE classique puis en procédant à une laborieuse « remontée ». Rappelons que l'algorithme d'EUCLIDE *étendu* est explicitement au programme de l'option.
  - pour analyser une complexité en temps, il faut compter des opérations et il est donc nécessaire dans un premier temps de bien identifier l'anneau dans lequel on compte les opérations. Pour donner un exemple simple, le produit de deux polynômes de degré n dans $\mathbf{K}[X]$ coûte une seule opération dans $\mathbf{K}[X]$, mais en coûte $O(n^2)$ dans $\mathbf{K}$.

- **Codes correcteurs d'erreurs.** Depuis quelques années, le jury constate une sensible progression des connaissances des candidates et des candidats sur le sujet. Les codes correcteurs sont une partie limitée du programme et très peu de connaissances sont exigibles et exigées. Toutefois, il est nécessaire de s'y être confronté pour se familiariser avec les problématiques sous-jacentes. À savoir, typiquement qu'un bon code correcteur a une grande dimension et grande distance minimale par rapport à sa longueur.

  Si les définitions de base (codes, distance de HAMMING, distance minimale) sont souvent connues, une interprétation pratique est trop peu souvent donnée. Par exemple, le ratio k/n pour un code de dimension k dans $\mathbf{F}_q^n$ est trop peu interprété comme un rendement ou un taux d'information. Il faut savoir expliquer comment utiliser concrètement un code donné, ou en quoi il est pertinent vis-à-vis du modèle d'erreurs présenté dans le texte. Enfin, mentionnons que la méconnaissance des corps finis est souvent rédhibitoire pour ce sujet.
- **Corps finis.** Sur cette notion, les connaissances des candidats et des candidates sont très inégales. Tout d'abord, il n'est pas acceptable de n'avoir pas d'autres exemples de corps finis en tête que $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. La construction d'extensions de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ doit être connue ainsi que la manière dont les opérations de corps s'effectuent. Par ailleurs, il est important de savoir différentier les structures algébriques sous-jacentes : par exemple, savoir que $\mathbf{F}_{p^n}$ est isomorphe en tant que $\mathbf{F}_p$-espace-vectoriel à $\mathbf{F}_p^n$ mais pas en tant qu'anneau.
- **Résultant.** Le jury regrette de constater que cette notion est boudée par les candidates et les candidats. Rappelons que si le résultant ne fait plus partie du programme de mathématiques générales, il continue à figurer parmi les notions au programme de l'option.

5.5.3 Mise en œuvre informatique

Le jury se réjouit de constater que les exposés utilisent presque toujours l'outil informatique. Il est important que les programmes et les calculs effectués avec l'outil informatique s'intègrent de façon pertinente dans l'exposé. L'aptitude à présenter, discuter et mettre en valeur les résultats d'exécution d'un programme puis à les relier à certains énoncés du texte est une démarche qui sera bien plus valorisée que la dextérité en programmation.

Le jury attire particulièrement l'attention sur les points suivants :

- les candidates et les candidats sont libres de leur choix en ce qui concerne le logiciel parmi ceux présents dans la `ClefAgreg`. Nous avons constaté que l'invitation du jury à réfléchir sur le choix d'un logiciel adapté à l'épreuve a été prise en compte : nous incitons les futurs candidats et candidates à continuer sur cette voie.
- le jury est parfois surpris de voir de longs et fastidieux calculs développés au tableau alors que l'utilisation de l'outil informatique aurait permis de gagner en temps et de la clarté.
- certains textes présentent des algorithmes pour résoudre efficacement un problème donné. Il est important de ne pas se contenter de les tester pour une valeur d'entrée très petite, puisque cela apparaît alors peu pertinent vis-à-vis du texte. Nous encouragerons les futurs candidates et candidats à tester leurs algorithmes sur plusieurs entrées de taille différente.

Chapitre 6

La bibliothèque de l'agrégation

6.1 Liste des livres disponibles

Le jury attire l'attention des candidats sur le fait que l'organisation du concours met à leur disposition une bibliothèque complète, bien ordonnée, avec des livres faciles à trouver. Cette bibliothèque fait l'objet d'achats réguliers qui permettent de proposer des ouvrages de référence modernes et adaptés. La liste sera mise à jour sur le site du jury avant les épreuves orales.

AEBISCHER B.	L2 Analyse fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique – **1 ex.** –	VUIBERT
AEBISCHER B.	L3 Géométrie – **1 ex.** –	VUIBERT
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices – **2 ex.** –	MASSON
ALDON G.	Mathématiques dynamiques – **2 ex.** –	HACHETTE
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie – **1 ex.** –	DUNOD
ALLAIRE G.	Analyse numérique et optimisation – **2 ex.** –	EDITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ALLANO-CHEVALIER M. **OUDOT X.**	Analyse et géométrie différentielle – **1 ex.** –	HACHETTE
ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations – **1 ex.** –	CAMBRIDGE

AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe – **2 ex.** –	Cassini
AMIOT E.	Une introduction aux mathématiques de la musique – **1 ex.** –	Calvage & Mounet
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques — Tome 1A - Topologie – **5 ex.** – — Tome 1B - Fonctions numériques – **6 ex.** – — Tome 2 - Suites et séries numériques – **6 ex.** – — Tome 3 - Analyse fonctionnelle – **6 ex.** – — Tome 5 - Algèbre générale, polynômes – **4 ex.** – — Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie – **6 ex.** – — Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie – **7 ex.** –	Ellipses
ANDREWS G.	Number Theory – **1 ex.** –	Dover
APPEL W.	Probabilités pour non probabilistes – **1 ex.** –	H & K
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG – **1 ex.** –	ESKA
ARNAUDIÈS J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie — Tome I – **1 ex.** – — Tome II – **1 ex.** –	Ellipses
ARNAUDIÈS J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse – **9 ex.** –	Dunod
ARNAUDIÈS J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4 – **1 ex.** –	Dunod

ARNAUDIÈS J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques — 1. Algèbre – **7 ex.** – — 2. Analyse – **6 ex.** – — 3. Compléments d'analyse – **8 ex.** – — 4. Algèbre bilinéaire et géométrie – **5 ex.** –	DUNOD
ARNAUDIÈS J.-M. **LELONG-FERRAND J.**	Cours de Mathématiques — Tome 1 pour M-M' : Algèbre – **5 ex.** – — Tome 1 pour MP AA' : Algèbre – **1 ex.** – — Tome 2 : Analyse – **7 ex.** – — Tome 3 : Géométrie et cinématique – **5 ex.** – — Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples – **4 ex.** –	DUNOD
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires – **2 ex.** –	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires – **3 ex.** –	MIR
ARNOLD V.	Lectures on partial differential equations – **1 ex.** –	SPRINGER
ARTIN E.	Algèbre géométrique – **5 ex.** –	GAUTHIER-VILLARS
ARTIN E.	Algèbre géométrique – **1 ex.** –	GABAY
ARTIN M.	Algebra – **2 ex.** –	PRENTICE HALL
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée — Tome 2 – **1 ex.** –	PUF
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation – **1 ex.** –	BELIN
AVEZ A.	Calcul différentiel – **2 ex.** –	MASSON
BAGES M. & AL.	MATHS MPSI-MP2I – **1 ex.** –	DUNOD

BAILLY-MAITRE G.	Arithmétique et cryptologie – **1 ex.** –	Ellipses
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques – **2 ex.** –	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique – **2 ex.** –	Hermann
BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation) – **1 ex.** –	Belin
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre – **1 ex.** –	Diderot, éditeur Arts et Sciences
BASS J.	Cours de Mathématiques — Tome 1 – **2 ex.** – — Tome 2 – **2 ex.** –	Masson
BAUDET J.	Nouvel abrégé d'histoire des mathématiques – **1 ex.** –	Vuibert
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology – **1 ex.** –	Springer
BECK V. **MALICK J.** **PEYRÉ G.**	Objectif Agregation – **4 ex.** –	HK
BENAÏM M. **EL KAROUI N.**	Promenade aléatoire – **1 ex.** –	Les éditions de l'X
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers – **3 ex.** –	Mc Graw Hill
BENIDIR M. **BARRET M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires – **1 ex.** –	Dunod
BENOIST J. *et al*	Math L2, Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés – **1 ex.** –	Pearson Education
BENOIST J. **SALINIER A.**	Exercices de calcul intégral – **2 ex.** –	Dunod
BENZONI-GAVAGE S.	Calcul différentiel et équations différentielles – **2 ex.** –	Dunod

BERCU B. **CHAFAÏ D.**	Modélisation stochastique et simulation – **1 ex.** –	DUNOD
BERGER M.	Géométrie — Index – **3 ex.** – — 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs – **3 ex.** – — 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères – **1 ex.** – — 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes – **3 ex.** – — 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques – **2 ex.** – — 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères – **2 ex.** –	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie tome 2 – **1 ex.** –	NATHAN
BERGER M.	Géométrie vivante – **2 ex.** –	CASSINI
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés – **3 ex.** –	CÉDIC/NATHAN
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle – **2 ex.** –	ARMAND COLIN
BERHUY G.	Algèbre, le grand combat – **1 ex.** –	CALVAGE & MOUNET
BERLINE N. **SABBAH C.**	Groupes finis, journées X-UPS 2000 – **1 ex.** –	EDITIONS DE L'X
BERTHELIN F.	Equations différentielles – **3 ex.** –	CASSINI
BHATIA R.	Matrix Analysis – **1 ex.** –	SPRINGER
BIASI J.	Mathématiques pour le CAPES et l'agrégation interne – **1 ex.** –	ELLIPSE
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics – **1 ex.** –	PRENTICE HALL

BIGGS N. L.	Discrete mathematics – **1 ex.** –	OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS
BINET G.	Traitement du signal – **2 ex.** –	ELLIPSE
BILLINGSLEY P.	Probability and measure – **2 ex.** –	WILEY
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs – **5 ex.** –	PUF
BOAS R.	A primer of real functions – **1 ex.** –	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
BOCCARA N.	Distributions – **2 ex.** –	ELLIPSES
BOISSONAT J.-D. **YVINEC M.**	Géométrie algorithmique – **1 ex.** –	EDISCIENCE
BON J.-L.	Fiabilité des systèmes – **1 ex.** –	MASSON
BONNANS J.-F. **GILBERT J.C.** **LEMARÉCHAL C.** **SAGASTIZABAL C.** **PENNEQUIN D.**	Optimisation numérique – **2 ex.** –	SPRINGER
BONY J.-M.	Cours d'analyse – **5 ex.** –	EDITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
BONY J.-M.	Méthodes mathématiques pour les sciences physiques – **3 ex.** –	EDITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
BORIES-LONGUET F.	Graphes et combinatoire – **2 ex.** –	ELLIPSE

BOSTAN A. **CHYZAK F.** **GIUSTI M.** **LEBTRETON R.** **LECERF G.** **SALVY B.** **SCHOST E.**	Algorithmes efficaces en calcul formel – **2 ex.** –	CHYZAK F. ED.
BOUALEM H. **BROUZET J.C.** **ELSNER B.** **KACZMAREK L.**	Mathématique L1 – **1 ex.** –	PEARSON EDUCATION
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique — Topologie générale, chapitres V à X – **2 ex.** – — Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII – **2 ex.** – — Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III – **2 ex.** – — Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV – **2 ex.** –	HERMANN
BOURGADE P.	Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005 – **1 ex.** –	CASSINI
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes – **3 ex.** –	HERMANN
BRÉMAUD P.	Introduction aux probabilités – **1 ex.** –	SPRINGER
BRÉZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications – **4 ex.** –	MASSON
BRÉZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications – **3 ex.** –	DUNOD
BRIANE M. **PAGÈS G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition – **3 ex.** –	VUIBERT
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'. – **2 ex.** –	ARMAND COLIN

CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire — 1. Espaces vectoriels , Polynômes – **4 ex.** – — 2. Matrices et réduction – **4 ex.** –	Ellipses
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale – **2 ex.** –	Dunod
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux – **1 ex.** –	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes – **1 ex.** –	PUF
CALDERO P.	Carnet de voyage en Analystan – **2 ex.** –	Calvage et Mounet
CALDERO P. **GERMONI J.**	Histoires hédonistes de groupes et de géométries – **7 ex.** –	Calvage et Mounet
CALDERO P. **GERMONI J.**	Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries – **3 ex.** –	Calvage et Mounet
CALDERO P. **PERONNIER M..**	Carnet de voyage en Algèbrie – **2 ex.** –	Calvage et Mounet
CALVO B.	Cours d'analyse II – **1 ex.** –	Armand Colin
CANDELPERGHER B.	Théorie des probabilités – **2 ex.** –	Calvage et Mounet
CARREGA J.C.	Théorie des corps – **1 ex.** –	Hermann
CARRIEU H.	Probabilités : exercices corrigés – **1 ex.** –	EDP Sciences
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1971) – **1 ex.** –	Hermann
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971) – **5 ex.** –	Hermann
CARTAN H.	Formes différentielles – **4 ex.** –	Hermann

CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques – **6 ex.** –	HERMANN
CASAMAYOU A. et al.	Calcul mathématique avec SAGE – **1 ex.** –	COPYRIGHTED MATERIAL
CASAMAYOU A. **CHAUVIN P.** **CONNAN G.**	Programmation en Python pour les mathématiques – **2 ex.** –	DUNOD
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics I – **1 ex.** –	WILEY INTERSCIENCE
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics II – **1 ex.** –	WILEY INTERSCIENCE
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing – **1 ex.** –	PRENTICE HALL
CHABANOL M.-L. **RUCH J.-J.**	Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques – **2 ex.** –	ELLIPSE
CHABAT B.	Introduction à l'analyse complexe – **1 ex.** –	MIR
CHAMBERT-LOIR A.	Algèbre corporelle – **1 ex.** –	EDITIONS DE L'X
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation — Analyse 2 – **1 ex.** – — Analyse 3 – **2 ex.** –	MASSON
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée) – **5 ex.** –	MASSON
CHARLES J. **MBEKHTA M.** **QUEFFÉLEC H.**	Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs – **4 ex.** –	DUNOD
CHARPENTIER E. **NIKOLSKI N.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui — Vol 1 – **3 ex.** – — Vol 2 – **1 ex.** – — Vol 3 – **2 ex.** – — Vol 4 – **1 ex.** –	CASSINI

CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra – **2 ex.** –	Springer Verlag
CHIRON D.	chemins d'analyse Tome 1 – **1 ex.** –	Eyrolles
CHOIMET D. **QUEFFÉLEC H.**	Analyse mathématique – **2 ex.** –	Cassini
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie – **6 ex.** –	Masson
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie – **4 ex.** –	Hermann
CHOQUET-BRUHAT Y.	Distributions. Théories et problèmes – **1 ex.** –	Masson
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	— Algèbre 1 – **1 ex.** – — Algèbre 2 – **2 ex.** –	Ellipses
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation – **2 ex.** –	Masson
COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes – **1 ex.** –	Vuibert
COHN P.M.	Algebra Volume 1 – **1 ex.** –	John Wiley
COLLET H. **GIRARD B.** **PERRIER C.**	Mathématique BTS industriel – **1 ex.** –	Nathan
COLLET P.	Modeling binary data – **1 ex.** –	Chapman and Hall
COLLET J.-F.	Discrete stochastic processes and applications – **2 ex.** –	Springer
COLMEZ P.	Éléments d'analyse et d'algèbre – **2 ex.** –	Editions de l'X
COMBES F	Algèbre et géométrie – **1 ex.** –	Bréal

COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques – **1 ex.** –	PUF
CORTELLA A.	Théorie des groupes – **2 ex.** –	Vuibert
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités – **2 ex.** –	Cassini
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics — Volume 1 – **1 ex.** – — Volume 2 – **1 ex.** –	John Wiley
COX D.A.	Galois Theory – **1 ex.** –	Wiley Interscience
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry – **1 ex.** –	John Wiley
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	— Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe – **2 ex.** – — Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe – **1 ex.** –	Masson
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités – **1 ex.** –	Masson
DANTZER J.F.	Mathématiques pour l'agrégation interne – **3 ex.** –	Vuibert
DEBREIL A.	Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes – **1 ex.** –	Calvage & Mounet
DEBREIL A. **EIDEN J.-D.** **MNEIMNÉ R.** **NGUYEN T.-H.**	Formes quadratiques et géométrie : Une introduction, et un peu plus – **1 ex.** –	Calvage & Mounet
DE BIÈVRE S.	Face au jury du CAPES : Préparer les leçons d'Analyse, l'oral du CAPES de mathématiques – **1 ex.** –	Ellipses
DEGRAVE	Précis de mathématiques. Probabilités, statistiques 2[e] année – **1 ex.** –	Bréal

DEHEUVELS P.	L'intégrale – **4 ex.** –	PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques – **3 ex.** –	PUF
DE KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres – **1 ex.** –	Modulo
DELCOURT J.	Théorie des groupes – **2 ex.** –	Dunod
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments – **2 ex.** –	Jacques Gabay
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles – **2 ex.** –	PU Grenoble
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations – **1 ex.** –	Ellipses
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes – **5 ex.** –	Cassini
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications – **1 ex.** –	Springer
DESCHAMPS C. **WARUSFEL A.** *et al.*	Mathématiques, cours et exercices corrigés — 1ère année MPSI, PCSI, PTSI – **2 ex.** – — 2ème année MP, PC, PSI – **1 ex.** –	Dunod
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres – **2 ex.** –	PUF
DE SEGUINS PAZZIS C.	Invitation aux formes quadratiques – **3 ex.** –	Calvage & Mounet
DESPRÉS B.	Lois de conservations euleriennes, lagrangiennes et méthodes numériques – **2 ex.** –	Springer
DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2 – **4 ex.** –	Ellipses
DI MENZA L.	Analyse numérique des équations aux dérivées partielles – **2 ex.** –	Cassini

DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire – **4 ex.** –	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal – **2 ex.** –	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques – **1 ex.** –	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. — Fondements de l'analyse moderne – **5 ex.** – — Éléments d'Analyse Tome 2. – **5 ex.** –	Gauthier-Villars
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle — Première année – **3 ex.** – — Deuxième année – **3 ex.** –	Gauthier-Villars
DOUCHET J.	Analyse complexe – **2 ex.** –	Presses polytechniques et univ. romandes
DOUCHET J.	Analyse : recueil d'exercices et aide-mémoire, volume 1 – **2 ex.** –	Presses polytechniques et univ. romandes
DOUCHET J.	Analyse : recueil d'exercices et aide-mémoire, volume 2 – **2 ex.** –	Presses polytechniques et univ. romandes
DOUCHET J. **ZWALHEN B.**	Calcul différentiel et intégral – **2 ex.** –	Presses polytechniques et univ. romandes
DRAPPER N. **SCHMITH H.**	Applied regression analysis – **1 ex.** –	Wiley
DUBERTRET G.	Initiation à la cryptographie – **1 ex.** –	PUF
DUBUC S.	Géométrie plane – **4 ex.** –	PUF

DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages – **1 ex.** –	VUIBERT
DUMAS L. .	Modélisation á l'oral de l'agrégation de calcul scientifique – **1 ex.** –	ELLIPSES
DUMMIT D.	Abstract Algebra – **1 ex.** –	WILEY
DUPONT G.	Probabilités et statistiques – **2 ex.** –	DUNOD
DYM H. **McKEAN H.P.**	Fouriers series and integrals – **1 ex.** –	ACADEMICS PRESS
EIDEN J.D.	Géométrie analytique classique – **3 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
EIDEN J.D.	Le jardin d'Eiden – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles – **3 ex.** –	ELLIPSES
ENGEL A.	Solutions d'expert — Vol 1 – **2 ex.** – — Vol 2 – **1 ex.** –	CASSINI
ÉPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes — Analyse. Volume 1 – **1 ex.** – — Algèbre. – **3 ex.** –	CÉDIC/NATHAN
ESCOFIER J.-P.	Théorie de Galois : Cours et exercices corrigés – **2 ex.** –	DUNOD
ESKIN G.	Lectures on linear partial differential equations – **2 ex.** –	AMS

EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques — Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles – **3 ex.** – — Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse – **3 ex.** – — Analyse 2 : Éléments de topologie générale – **3 ex.** –	Hatier
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure – **3 ex.** –	MIR
FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X – **7 ex.** –	Ellipses
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie – **3 ex.** –	Calvage et Mounet
FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur – **1 ex.** –	Ellipses
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications — Volume 1 – **2 ex.** – — Volume 2 – **2 ex.** –	John Wiley
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence – **2 ex.** –	Masson
FILBET F.	Analyse numérique – **2 ex.** –	Dunod
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions — Tome 1 - Topologie – **10 ex.** – — Tome 2 - Fonctions, Variables – **6 ex.** – — Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples – **7 ex.** – — Tome 4 - Séries, équations différentielles – **8 ex.** –	Vuibert
FOISSY L. **NINET A.**	Algèbre et calcul formel – **2 ex.** –	Ellipses
FONTANEZ F. **RANDÉ B.**	Les clefs pour les Mines – **2 ex.** –	Calvage et Mounet

FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales — Algèbre – **1 ex.** – — Analyse 1 – **1 ex.** –	Ellipses
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1 – **7 ex.** –	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 2 – **1 ex.** –	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 3 – **4 ex.** –	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 1 – **3 ex.** –	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 2 – **4 ex.** –	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 3 – **5 ex.** –	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 4 – **1 ex.** –	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1 – **2 ex.** –	Masson
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie – **1 ex.** –	Hermann
FRESNEL J. **MATIGNON M.**	Algèbre et géométrie : Recueil d'exercices corrigés – **1 ex.** –	Hermann
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra – **1 ex.** –	Springer
FULTON W.	Algebraic Topology A first course – **1 ex.** –	Springer

GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire – **3 ex.** –	Cassini
GALLOUET T. **HERBIN R.**	Mesure, Intégration, Probabilités – **3 ex.** –	Ellipses
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices — Tome 1 – **1 ex.** – — Tome 2 – **1 ex.** –	Dunod
GARET O.	Probabilités et processus stochastiques – **2 ex.** –	Copyrighted material
GARET O. **KURTZMANN A.**	De l'intégration aux probabilités – **5 ex.** –	Ellipses
GARLING D.J.H.	Inequalities : a journey into linear analysis – **1 ex.** –	Cambridge
GARNIER J.-M.	Groupes et géométrie pour l'agrégation – **4 ex.** –	Ellipses
GATHEN (von zur) J. **GERHARD .J**	Modern computer algebra – **1 ex.** –	Cambridge University press
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus – **2 ex.** –	Vuibert
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse – **1 ex.** –	Springer
GINDIKIN S.	Histoires de mathématiciens et de physiciens – **1 ex.** –	Cassini
GOBLOT R.	Algèbre commutative – **2 ex.** –	Masson
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie – **1 ex.** –	Masson
GODEMENT R.	Analyse — Tome 1 – **1 ex.** – — Tome 2 – **4 ex.** – — Tome 3 – **1 ex.** –	Springer
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre – **4 ex.** –	Hermann

GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations – **1 ex.** –	WILEY
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation — Topologie et Analyse fonctionnelle – **2 ex.** – — Calcul différentiel – **1 ex.** –	ELLIPSES
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales — Tome 1 - Algèbre – **1 ex.** – — Tome 2 - Topologie et analyse réelle – **1 ex.** – — Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel – **1 ex.** – — Tome 4 - Géométrie affine et métrique – **1 ex.** – — Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes – **1 ex.** –	PUF
GOUDON T.	Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique – **2 ex.** –	ISTE
GOUDON T.	Intégration – **2 ex.** –	ELLIPSES
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' — Algèbre Probabilités – **3 ex.** – — Algèbre – **1 ex.** – — Analyse – **5 ex.** –	ELLIPSES
GOZARD I.	Théorie de Galois – **2 ex.** –	ELLIPSES
GRAHAM R. **KNUTH D.** **PATASHNIK O.**	Concrete mathematics – **1 ex.** –	ADISON-WESLEY
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire – **2 ex.** –	HERMANN
GRENIER J.-P.	Débuter en algorithmique avec Matlab et Scilab – **1 ex.** –	ELLIPSES
GREUB W.	Linear Algebra – **2 ex.** –	SPRINGER VERLAG

GRIFONE J.	Algèbre linéaire – **3 ex.** –	Cepadues
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction) – **1 ex.** –	Oxford
GUININ D. **ZAUBONNET F.** **JOPPIN B.**	Cours et exercices résolus — Algèbre-Géométrie MPSI – **1 ex.** – — MP – **1 ex.** –	Bréal
GUIGNARD Q. **RANDE B.**	Les clés pour l'oral MP Mathématiques – **1 ex.** –	Calvage et Mounet
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics – **1 ex.** –	Wiley
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse – **7 ex.** –	Ellipses
HAMMAD P.	Cours de probabilités – **3 ex.** –	Cujas
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités – **2 ex.** –	Cujas
HARDY G.H. **WRIGHT E.M.**	An introduction to the theory of numbers – **2 ex.** –	Oxford
HAUCHECORNE B.	Les contre-exemples en mathématiques – **2 ex.** –	Ellipses
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications – **2 ex.** –	Masson
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis — Volume 1 – **1 ex.** – — Volume 2 – **1 ex.** – — Volume 3 – **2 ex.** –	Wiley-Interscience
HERVÉ M.	Les fonctions analytiques – **4 ex.** –	PUF
HINDRY M.	Arithmétique – **2 ex.** –	Calvage et Mounet
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle – **2 ex.** –	Masson

HOCHART M. **SCIUTO G.**	Algèbre Analyse Géométrie (MPSI/PCSI) – **1 ex.** –	Vuibert
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices – **1 ex.** –	Belin
HUBBARD J. **HUBERT F.**	Calcul scientifique T1 – **3 ex.** –	Vuibert
HUBBARD J. **HUBERT F.**	Calcul scientifique T2 – **3 ex.** –	Vuibert
INGRAO B.	Coniques projectives, affines et métriques – **2 ex.** –	Calvage et Mounet
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory – **2 ex.** –	Springer Verlag
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy) – **1 ex.** –	Vuibert-Springer
ITARD J.	Les nombres premiers – **1 ex.** –	Que sais-je ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra — Tome I – **2 ex.** – — Tome II – **2 ex.** –	Freeman and Co
JACOD J. **PROTTER P.**	L'essentiel en théorie des probabilités – **2 ex.** –	Cassini
JAUME M.	Éléments de mathématiques discrètes – **2 ex.** –	Ellipses
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes – **4 ex.** –	Cassini
KERBRAT Y. **BRAEMER J.-M.**	Géometrie des courbes et des surfaces – **1 ex.** –	Hermann
KERNIGHAN B. **RITCHIE D.**	Le langage C – **1 ex.** –	Dunod
KETRANE H. **ELINEAU L.**	Épreuve orale d'exemples et d'exercices : Agrégation interne/CAERPA mathématiques – **1 ex.** –	Dunod

KLOECKNER B.	Un bref aperçu de la géométrie projective – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
KNUTH D.E.	The art of computer programming — Volume 1 : Fundamental algorithms – **1 ex.** – — Volume 2 : Seminumerical algorithms – **1 ex.** – — Volume 3 : Sorting and Searching – **1 ex.** –	ADDISON-WESLEY
KOBLITZ N.	A course in number theory and cryptography – **1 ex.** –	SPRINGER
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle – **1 ex.** –	ELLIPSES
KÖRNER T.W.	Exercises in Fourier analysis – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
KÖRNER T.W.	Fourier analysis – **2 ex.** –	CAMBRIDGE
KOURIS E.	Une année de colle en maths en MPSI – **2 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2 – **1 ex.** –	DUNOD
KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens – **2 ex.** –	CASSINI
KRIVINE J.-L.	Théorie axiomatique des ensembles – **2 ex.** –	PUF
KRIVINE J.-L.	Théorie des ensembles – **2 ex.** –	CASSINI
KUNG J.P.S. **ROTA G-C.** **YAN C.H.**	Combinatorics : the Rota way – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
LAAMRI E. H.	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions – **1 ex.** –	DUNOD
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles – **1 ex.** –	PUF

LANG S.	Algèbre linéaire — Tome 1 – **2 ex.** – — Tome 2 – **2 ex.** –	InterEditions
LANG S.	Algebra – **5 ex.** –	Addison-Wesley
LANG S.	Linear Algebra – **3 ex.** –	Addison-Wesley
LAROCHE F.	Escapades arithmétiques – **1 ex.** –	Ellipses
LASCAUX T. **THÉODOR R.**	Analyse matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tomes 1 & 2 – **2 ex.** –	Dunod
LAVILLE G.	Courbes et surfaces – **1 ex.** –	Ellipses
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation – **1 ex.** –	Ellipses
LAX P. D.	Functional analysis – **1 ex.** –	Wiley
LAX P. D.	Linear Algebra – **1 ex.** –	Wiley
LEBOEUF C. **GUÉGAND J.** **ROQUE J.L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités – **1 ex.** –	Ellipses
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie – **3 ex.** –	PUF
LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques – **1 ex.** –	Jacques Gabay
LEHMANN D. **SACRÉ C.**	Géométrie et topologie des surfaces – **1 ex.** –	PUF

LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales — Tome 1 : Topologie – **8 ex.** – — Tome 2 : Dérivation – **8 ex.** – — Tome 3 : Intégration et sommation – **4 ex.** – — Tome 4 : Analyse en dimension finie – **8 ex.** – — Tome 5 : Analyse fonctionnelle – **5 ex.** –	Masson
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS — Tome I - Algèbre 1 – **2 ex.** – — Tome 2 - Algèbre et géométrie – **5 ex.** – — Tome 3 - Analyse 1 – **4 ex.** – — Tome 4 - Analyse 2 – **9 ex.** –	Ellipses
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle – **3 ex.** –	Masson
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie – **2 ex.** –	PUF
LELONG-FERRAND J.	exercices résolus d'analyse – **1 ex.** –	Dunod
LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie – **1 ex.** –	Armand Colin
LESSARD S.	Les rudiments du calcul stochastique – **1 ex.** –	Ellipses
LESSARD S.	Processus stochastiques – **1 ex.** –	Ellipses
LIRET F.	Maths en pratiques – **1 ex.** –	Dunod
LIRET F. **MARTINAIS D.**	Algèbre 1 – **1 ex.** –	Dunod
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition) – **1 ex.** –	Vuibert
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words – **1 ex.** –	Cambridge

MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre — 1 : Structures fondamentales – **4 ex.** – — 2 : Les grands théorèmes – **4 ex.** –	Gauthier-Villars
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory – **1 ex.** –	Springer
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes – **2 ex.** –	Masson
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque – **2 ex.** –	Hermann
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices – **1 ex.** –	Masson
MANIVEL L.	Cours spécialisé – **1 ex.** –	SMF
MANSUY R. **MNEIMNÉ R.**	Algèbre linéaire réduction des endomorphismes – **3 ex.** –	Vuibert
MANSUY R. **RANDÉ B.**	Les clefs pour l' X – **2 ex.** –	Calvage et Mounet
MARCO J.P. *et al.*	Analyse L3 – **1 ex.** –	Pearson
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle — Tome 2 : Exercices et corrigés – **1 ex.** – — Tome 3 : Exercices et corrigés – **1 ex.** – — Tome 4 : Exercices et corrigés – **1 ex.** –	PUF
MAURY B.	Analyse fonctionnelle, Exercices et problèmes corrigés – **15 ex.** –	Ellipses
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions – **2 ex.** –	De Boeck Université
MENEZES A.J. **van OORSCHOT P.C.** **VANSTONE S.A.**	Handbook of applied cryptography – **1 ex.** –	CRC Press
MERINDOL J.-Y.	Nombres et algèbre – **2 ex.** –	EDP Sciences

MERKIN D.	Introduction to the theory of stability – **1 ex.** –	Springer
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique – **2 ex.** –	Ellipses
MEUNIER P.	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés — Tome 2 – **1 ex.** – — Tome 3 – **1 ex.** –	PUF
MEUNIER P.	Algèbre avec applications à l'algorithmique et à la cryptographie – **1 ex.** –	Ellipses
MEYRE T.	Probabilités, cours et exercices corrigés – **2 ex.** –	Calvage & Mouret
MEYRE T.	Séries, intégrales et probabilités – **7 ex.** –	IREM Université Paris Diderot
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel – **1 ex.** –	PUF
MILHAUD X.	Statistique – **1 ex.** –	Belin
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes – **4 ex.** –	Cassini
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes – **2 ex.** –	Calvage et Mounet
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques – **5 ex.** –	Hermann
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries – **3 ex.** –	Ellipses
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions – **2 ex.** –	Ellipses

MONIER J.M.	Cours de mathématiques — Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI – **1 ex.** – — Analyse 3 MP, PSI, PC, PT – **1 ex.** – — Analyse 4 MP, PSI, PC, PT – **1 ex.** – — Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI – **2 ex.** – — Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT – **1 ex.** – — Exercice d'algèbre et géométrie MP – **1 ex.** –	DUNOD
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique — Tome 1 – **3 ex.** – — Tome 2 – **3 ex.** –	VUIBERT
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel – **1 ex.** –	SEUIL
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés – **1 ex.** –	MASSON
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités – **1 ex.** –	MASSON
NEVEU J.	Martingales à temps discret – **1 ex.** –	MASSON
NIVEN I.	Irrational numbers – **2 ex.** –	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
NORRIS J.R.	Markov chains – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
NOURDIN Y.	Leçons d'analyse, probabilités, algèbre et géométrie – **1 ex.** –	DUNOD
O'ROURKE J.	Computational geometry in C (second edition) – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
OPREA J.	Differential geometry – **1 ex.** –	PRENTICE HALL
ORTIZ P.	Exercice d'Algèbre – **1 ex.** –	ELLIPSE

OUVRARD J.Y.	— Probabilités 1 (capes, agrégation) – **3 ex.** – — Probabilités 2 (maîtrise, agrégation) – **1 ex.** –	CASSINI
PABION J.F.	Elements d'analyse complexe – **2 ex.** –	ELLIPSE
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs – **2 ex.** –	SPRINGER
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course – **1 ex.** –	DOVER
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems – **1 ex.** –	SPRINGER
PERRIN D.	Cours d'Algèbre – **3 ex.** –	ELLIPSES
PERRIN D.	Cours d'Algèbre – **2 ex.** –	ENSJF
PERRIN D.	Nombres, mesures et géométrie – **1 ex.** –	ELLIPSE
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE – **3 ex.** –	CASSINI
PETROVŠEK M. **WILF H.S.** **ZEILBERGER D.**	A=B – **1 ex.** –	A.K. PETERS
PEVZNER P.	Computational molecular biology- an algorithmic approach – **1 ex.** –	MIT PRESS
PEYRÉ G.	L'algèbre discrète de la transformée de Fourier – **3 ex.** –	ELLIPSE
PÓLYA G. **SZEGŐ G.**	Problems and Theorems in Analysis — Volume I – **3 ex.** – — Volume II – **3 ex.** –	SPRINGER VERLAG
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse – **1 ex.** –	ELLIPSES
PRASOLOV V.	Polynomials – **1 ex.** –	SPRINGER

PRASOLOV V.	Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaires – **3 ex.** –	CASSINI
PREPARATA F.P. **SHAMOS M.I.**	Computational geometry - an introduction – **1 ex.** –	SPRINGER
PRESS W. **FLANNERY B.** **TEUKOLSKI S.** **VETTERLING W.**	Numerical recipes in Pascal – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
PUTZ J.F.	Maple animation – **1 ex.** –	CHAPMAN AND HALL
QUATERONI A. **SACCO R.** **SALERI F.**	Méthodes numériques – **2 ex.** –	SPRINGER
QUATERONI A. **SALERI F.** **GERVASIO P.**	Calcul scientifique – **2 ex.** –	SPRINGER
QUEFFÉLEC H.	Topologie – **1 ex.** –	MASSON
QUEFFÉLEC H.	Topologie – **3 ex.** –	DUNOD
QUEFFÉLEC H. **QUEFFELEC M..**	Analyse complexe et applications – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
QUEFFÉLEC H. **ZUILY C.**	Analyse pour l'agregation – **4 ex.** –	DUNOD
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first course in numerical analysis – **3 ex.** –	INTERNATINAL STUDENT EDITION
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales — 1- Algèbre – **7 ex.** – — 2- Algèbre et applications à la géométrie – **8 ex.** – — 3- Topologie et éléments d'analyse – **13 ex.** – — 4- Séries et équations différentielles – **9 ex.** – — 5- Applications de l'analyse à la géométrie – **8 ex.** –	MASSON

RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions — Algèbre – **2 ex.** – — Analyse 1 – **5 ex.** – — Analyse 2 – **7 ex.** –	MASSON
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 1 – **2 ex.** –	DUNOD
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 2 – **2 ex.** –	DUNOD
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 3 – **2 ex.** –	DUNOD
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application – **1 ex.** –	WILEY
RANDÉ B. **MANSUY R.**	Les clefs pour l'X (2) – **1 ex.** –	CALVAGE MOUNET
RANDÉ B. **TAIEB F.**	Les clefs pour l'X – **1 ex.** –	CALVAGE MOUNET
REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques – **1 ex.** –	LIVRE DE POCHE
REMMERT R.	Classical topics in complex function theory – **1 ex.** –	SPRINGER
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel – **2 ex.** –	HERMANN
RIESZ F. **NAGY SZ. B.**	Leçons d'analyse fonctionnelle – **2 ex.** –	GAUTHIER-VILLARS
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants – **2 ex.** –	SPRINGER
RISLER J.-J.. **BOYER P.**	Algèbre pour la licence 3 – **2 ex.** –	DUNOD
RITTAUD, B.	Newton implique Kepler – **2 ex.** –	ELLIPSES
RIVAUD J.	Algèbre (Tome 2) – **1 ex.** –	VUIBERT

RIVOIRARD V. **STOLTZ G.**	Statistique mathématique en action – **3 ex.** –	DUNOD
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple – **1 ex.** –	VUIBERT
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières – **1 ex.** –	CÉDIC/NATHAN
ROMAN S.	Field theory – **1 ex.** –	SPRINGER-VERLAG
ROMBALDI J.-E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques algébre et géometrie – **2 ex.** –	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.-E.	Interpolation et approximation Analyse pour l'agrégation - Cours et exercices résolus – **1 ex.** –	VUIBERT
ROMBALDI J.-E.	Analyse matricielle – **2 ex.** –	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.-E.	Éléments d'analyse réelle – **1 ex.** –	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.-E.	Mathématiques pour l'agrégation – **4 ex.** –	DEBOECK SUP.
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'Agrégation de mathématiques – **2 ex.** –	EDP SCIENCES
ROTMAN J. J.	An introduction to the theory of groups – **1 ex.** –	SPRINGER-VERLAG
ROUDIER H.	Alèbre linéaire. Cours et exercices – **1 ex.** –	VUIBERT
ROUSSEAU Y. **SAINT-AUBIN Y.**	Mathématiques et technologie – **1 ex.** –	SPRINGER (SUMAT)
ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation – **4 ex.** –	CASSINI
ROUX J.	Systèmes dynamiques et méthodes de continuation : Applications en biologie et dynamique des populations – **1 ex.** –	ELLIPSES

RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3 – **2 ex.** –	MASSON
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe – **2 ex.** –	MASSON
RUDIN W.	Functional analysis – **4 ex.** –	MC GRAW HILL
RUDIN W.	Real and complex analysis – **3 ex.** –	MC GRAW HILL
SA EARP R. **TOUBIANA E.**	Introduction à la Géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann – **1 ex.** –	CASSINI
SAINSAULIEU L.	Calcul scientifique – **1 ex.** –	DUNOD
SAINT RAYMOND J.	Topologie, calcul différentiel et variable complexe – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
SAKAROVITCH J.	Eléments de théorie des automates – **1 ex.** –	VUIBERT
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques – **2 ex.** –	MASSON
SAMUEL P.	Géométrie projective – **1 ex.** –	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres – **3 ex.** –	HERMANN
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1 – **1 ex.** –	ELLIPSES
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel : Corps finis, systèmes polynomiaux - Applications – **1 ex.** –	ELLIPSES
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices – **1 ex.** –	VUIBERT
SCHATZMAN M.	Analyse numérique, une approche mathématique – **2 ex.** –	DUNOD
SCHNEIER B.	Applied cryptography – **1 ex.** –	WILEY

SCHWARTZ L.	Analyse — I Topologie générale et analyse fonctionnelle – **4 ex.** – — II Calcul différentiel et équations différentielles – **1 ex.** –	Hermann
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse — Tome 1 – **2 ex.** – — Tome 2 – **3 ex.** –	Hermann
SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques – **1 ex.** –	Hermann
SEGUINS PAZZIS (de) C.	Invitation aux formes quadratiques – **1 ex.** –	Calvage et Mounet
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes – **1 ex.** –	Springer
SERFATI M.	Maths Sup & Spé, Algèbre – **1 ex.** –	Belin
SERRE D.	Les matrices, théorie et pratique – **3 ex.** –	Dunod
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique – **3 ex.** –	PUF
SHAPIRO H.N.	Introduction to the theory of numbers – **1 ex.** –	Dover
SIDLER J.C.	Géométrie Projective – **1 ex.** –	Dunod
SILVESTER J. R.	Geometry, ancient and modern – **1 ex.** –	Oxford Univ. Press
SKANDALIS G.	Topologie et analyse – **1 ex.** –	Dunod
SKANDALIS G.	Agrégation interne : Algèbre générale, algèbre linéaire et un peu de géométrie – **2 ex.** –	Calvage & Mounet
SOROSINA E. **METIER P.**	Système D - Algèbre générale. – **1 ex.** –	Dunod

STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I – **2 ex.** –	WADDWORTH AND BROOKS
STEIN E.	Functional Analysis – **2 ex.** –	PRINCETON
STEIN E.	Complex Analysis – **2 ex.** –	PRINCETON
STEIN E.	Fourier Analysis – **2 ex.** –	PRINCETON
STEIN E.	Real Analysis – **2 ex.** –	PRINCETON
STEWART I.	Galois theory – **2 ex.** –	CHAPMAN AND HALL
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre – **1 ex.** –	CASSINI
SZPIRGLAS A. *et al.*	Mathématiques : Algèbre L3 – **1 ex.** –	PEARSON
TAUVEL P.	Cours de Géométrie – **1 ex.** –	DUNOD
TAUVEL P.	Cours d'algèbre – **1 ex.** –	DUNOD
TAUVEL P.	Corps commutatifs et théorie de Galois – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
TAUVEL P.	Algèbre linéaire - Échappée décisive dans un territoire splendide – **2 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation – **2 ex.** –	MASSON
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2 – **1 ex.** –	MASSON
TAUVEL P.	Analyse complexe pour la licence – **2 ex.** –	DUNOD
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1 – **1 ex.** –	S. M. F.

TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres – **1 ex.** –	Belin
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers – **1 ex.** –	Que sais-je ? PUF
TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2 – **1 ex.** –	S. M. F.
TESTARD F.	Analyse mathématique – **3 ex.** –	Calvage et Mounet
TEYTAUD O. **ANTONINI C.** **BORGNAT P.** **CHATEAU A.** **LEBEAU E.**	Les maths pour l'agreg – **2 ex.** –	Dunod
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne – **1 ex.** –	Hermann
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions – **4 ex.** –	Bréal
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions – **2 ex.** –	Oxford Univ. Press
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires – **1 ex.** –	Masson
TOULOUSE PAUL S.	Thème de probabilité et statistiques – **1 ex.** –	Dunod
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables – **1 ex.** –	Vuibert
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires – **1 ex.** –	IREM Pays de la Loire
TRUSS J.-K..	Foundations of mathematical analysis – **1 ex.** –	Oxford
ULMER F.	Théorie des groupes – **3 ex.** –	Ellipses
ULMER F.	anneaux, corps, résultant – **2 ex.** –	Ellipses

VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique — I Théorie des fonctions – **2 ex.** – — II Équations fonctionnelles - Applications – **2 ex.** –	Masson
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation – **3 ex.** –	Masson
VERGNAUD D.	Exercices et problèmes de cryptographie – **2 ex.** –	Dunod
VINBERG E. B.	A course in algebra – **1 ex.** –	AMS
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes - Équations différentielles – **1 ex.** –	Hermann
WAGSCHAL C.	Topologie et analyse fonctionnelle – **1 ex.** –	Hermann
WAGSCHAL C.	Distributions, analyse microlocale, équations aux dérivées partielles – **2 ex.** –	Hermann
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies – **2 ex.** –	Classiques Hachette
WARUSFEL A. **ATTALI P.** **COLLET M.** **GAUTIER C.** **NICOLAS S.**	Mathématiques — Analyse – **1 ex.** – — Arithmétique – **1 ex.** – — Géométrie – **1 ex.** – — Probabilités – **1 ex.** –	Vuibert
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis – **3 ex.** –	Cambridge
WILF H.	Generatingfunctionology – **1 ex.** –	Academic Press
WILF H.	Algorithms and complexity – **1 ex.** –	A.K. Peters
WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire – **3 ex.** –	Cassini
WILLEM M.	Principes d'analyse fonctionnelle – **3 ex.** –	Cassini

YALE P.B.	Geometry and Symmetry – **1 ex.** –	Dover
YGER A.	Analyse complexe – **2 ex.** –	Ellipses
YGER A. *et al.*	Mathématiques appliquées L3 – **1 ex.** –	Pearson
YGER A. *et al.*	Intégration, espaces de Hilbert et analyse de Fourier – **1 ex.** –	Ellipse
YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics – **1 ex.** –	Dover
ZAVIDOVIQUE M.	Un max de math – **1 ex.** –	Calvage et Mounet
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie – **3 ex.** –	Cassini
ZUILY C.	Éléments de distributions et d' équations aux dérivées partielles – **2 ex.** –	Dunod
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation – **1 ex.** –	Masson
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Problèmes de distributions – **3 ex.** –	Cassini

6.2 Bibliothèque numérique

Pour l'épreuve de leçons de mathématiques, les candidates et candidats peuvent utiliser la bibliothèque du concours. La liste des ouvrages disponibles se trouve dans le rapport du concours externe. En 2021, les candidats ont pu utiliser une bibliothéque numérique pendant la préparation de l'épreuve de modélisation. La liste des livres disponibles actualisée en 2023 est décrite ci-dessous.

— Grégoire Allaire : Analyse numerique et optimisation (Éditions de l'École polytechnique)
— Gilles Bailly-Maitre : Arithmétique et cryptologie (Ellipses, 2e édition)
— Philippe Barbe et Michel Ledoux - Probabilité (EDP Sciences)
— Sylvie Benzoni-Gavage : Calcul différentiel et équations différentielles (Dunod, 2e édition)
— Florent Berthelin : Équations différentielles (Cassini)
— Frédéric Bertrand, Myriam Maumy Bertrand : Initiation à la statistique avec R (Dunod)
— Alin Bostan et al. : Algorithmes efficaces en calcul formel (Hal.inria.fr)
— Richard Brent, Paul Zimmermann : Modern Computer Arithmetic (Cambridge University Press)
— Hervé Carrieu : Probabilité (EDP Sciences)
— Alexandre Casamayou et al. : Calcul mathématique avec Sage
— Marie-Line Chabanol, Jean-Jacques Ruch : Probabilités et statistiques (Ellipses)
— Djalil Chafai, Pierre-André Zitt : Probabilités, préparation à l'agrégation interne
— Djalil Chafai, Florant Malrieu : Recueil de modèles aléatoires (HAL Id : hal-01897577, version 3)
— Jean-Pierre Demailly - Analyse numérique et équations différentielles (EDP Sciences, 4e édition)
— Michel Demazure : Cours d'algèbre (Cassini)
— Laurent di Menza : Analyse numérique des équations aux dérivées partielles (Cassini)
— Jérôme Escoffier : Probabilités et statistiques (Ellipses, 3e édition)
— Francis Filbet : Analyse numérique (Dunod, 2e édition)
— Loïc Foissy et Alain Ninet : Algèbre et calcul formel (Ellipses)
— Olivier Garet et Aline Kurtzmann : De l'intégration aux probabilités (Ellipses, 2e édition)
— Thierry Goudon : Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique (ISTE)
— Jean-Baptiste Hiriart-Urruty : Optimisation et analyse convexe (EDP Sciences)
— John Hubbard, Beverly West : équations différentielles et systèmes dynamiques (Cassini)
— Laurent Le Floch et Frédéric Testard : Probabilités 1 (Calvage et Mounet)
— Thierry Meyre : Probabilités, cours et exercices corrigés. Tome 1 (Calvage et Mounet
— Thierry Meyre : Probabilités, cours et exercices corrigés. Tome 2 (Calvage et Mounet)
— Jean-Yves Ouvrard : Probabilités. tome 1 (Cassini, 2e édition)
— Jean-Yves Ouvrard : Probabilités. tome 2 (Cassini, 2e édition)
— Jean-Étienne Rombaldi : Analyse matricielle (EDP Sciences, 2e édition)
— François Rouvière : Petit guide de calcul différentiel (Cassini, 4e édition)
— Victor Shoup : Computational introduction to number theory and algebra (Cambride University Press)
— Damien Vergnaud : Exercices et problèmes de cryptographie (Dunod, 3e édition)