Corrigé du TD N°1

Exercice 1 :

Vérification des relations en utilisant la méthode Algébrique:
1. $cd + bca + b\bar{d} = cd + b\bar{d}$

En multipliant le deuxième terme du premier membre par $(d + \bar{d})$ on trouve :

$$cd + bca(d + \bar{d}) + b\bar{d} = cd + abcd + abc\bar{d} + b\bar{d}$$

En rassemblant les termes deux à deux on trouve :

$$cd + abcd + abc\bar{d} + b\bar{d} = cd(a \cdot b + 1) + b\bar{d}(1 + a \cdot c) = cd + b\bar{d}$$

Donc les deux relations sont identiques.

2. $(a + \bar{b})(a + b)(\bar{b} + \bar{c}) = (a + \bar{b})(a + b)(a + \bar{c})$

On développe les deux membres :

Le premier membre :

$$(a + \bar{b})(a + b)(\bar{b} + \bar{c}) = (aa + ab + a\bar{b} + \bar{b}b)(\bar{b} + \bar{c})$$

$$(a + \bar{b})(a + b)(\bar{b} + \bar{c}) = (a + a(b + \bar{b}) + 0)(\bar{b} + \bar{c})$$

$$(a + \bar{b})(a + b)(\bar{b} + \bar{c}) = (a + a)(\bar{b} + \bar{c})$$

$$(a + \bar{b})(a + b)(\bar{b} + \bar{c}) = a(\bar{b} + \bar{c})$$

$$(a + \bar{b})(a + b)(\bar{b} + \bar{c}) = a\bar{b} + a\bar{c}$$

Le deuxième membre :

$$(a + \bar{b})(a + b)(a + \bar{c}) = (aa + ab + a\bar{b} + \bar{b}b)(a + \bar{c})$$

$$(a + \bar{b})(a + b)(a + \bar{c}) = (a + a(b + \bar{b}) + 0)(a + \bar{c})$$

$$(a + \bar{b})(a + b)(a + \bar{c}) = (a + a)(a + \bar{c})$$

$$(a + \bar{b})(a + b)(a + \bar{c}) = a(a + \bar{c})$$

$$(a + \bar{b})(a + b)(a + \bar{c}) = a + a\bar{c}$$

Donc : $(a + \bar{b})(a + b)(\bar{b} + \bar{c}) \neq (a + \bar{b})(a + b)(a + \bar{c})$ les deux relations ne sont identiques.

3. $ab + ac + bc = (a + b)(b + c)(c + a)$

On développe le deuxième membre :

$$(a + b)(b + c)(c + a) = (ab + ac + bb + bc)(c + a)$$

$$(a + b)(b + c)(c + a) = (ab + ac + b(1 + c))(c + a)$$

$$(a + b)(b + c)(c + a) = (b(a + 1) + ac)(c + a)$$

$$(a + b)(b + c)(c + a) = (b + ac)(c + a)$$

$$(a + b)(b + c)(c + a) = bc + ba + acc + aac$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) = bc + ab + ac + ac$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) = bc + ab + ac$$

Donc : $ab + ac + bc = (a+b)(b+c)(c+a)$les deux relations sont identiques

Exercice 2 :

Ecrire sous la première et la deuxième forme canonique les fonctions définies par :

1. **La fonction** : $f_1(a,b,c,d) = \bar{b}c + da\bar{b} + da\bar{c} + \bar{d}\bar{a}c$

1ereMéthode : Table de vérité

On a 4 variables a, b, c et d $\Rightarrow 2^4 = 16$ lignes

On a 4 variables a, b, c et d et la fonction $f_1(a,b,c,d) \Rightarrow$ 5 colonnes

Table de vérité avec 5 colonnes et 16 lignes :

-	a	b	c	d	$f_1(a,b,c,d)$
	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	0
$\boldsymbol{\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c\cdot\bar{d}}$	0	0	1	0	1
$\boldsymbol{\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c\cdot d}$	0	0	1	1	1
	0	1	0	0	0
	0	1	0	1	0
$\boldsymbol{\bar{a}\cdot b\cdot c\cdot\bar{d}}$	0	1	1	0	1
	0	1	1	1	0
	1	0	0	0	0
$\boldsymbol{a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot d}$	1	0	0	1	1
$\boldsymbol{a\cdot\bar{b}\cdot c\cdot\bar{d}}$	1	0	1	0	1
$\boldsymbol{a\cdot\bar{b}\cdot c\cdot d}$	1	0	1	1	1
	1	1	0	0	0
$\boldsymbol{a\cdot b\cdot\bar{c}\cdot d}$	1	1	0	1	1
	1	1	1	0	0
	1	1	1	1	0

Première forme canonique : (somme des produits)

On veut écrire f_1 sous la première forme canonique $\Rightarrow$ on fait alors la somme des produits :

$$f_1(a,b,c,d) = (\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c\cdot\bar{d}) + (\bar{a}\cdot b\cdot c\cdot\bar{d}) + (a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot d) + (a\cdot\bar{b}\cdot c\cdot\bar{d}) + (a\cdot\bar{b}\cdot c\cdot d) + (a\cdot b\cdot\bar{c}\cdot d)$$

mintermes

Remarque : la somme de tous les mintermes vaut toujours 1.

Deuxième forme canonique : (produit des sommes)

- On veut écrire f_1 sous la deuxième forme canonique $\Rightarrow$ on fait alors le produit des sommes : (Produit des maxtermes correspondant aux valeurs nulles de f_1).

	a	b	c	d	$f_1(a,b,c,d)$
$\boldsymbol{a+b+c+d}$	0	0	0	0	0
$\boldsymbol{a+b+c+\bar{d}}$	0	0	0	1	0
	0	0	1	0	1
	0	0	1	1	1
$\boldsymbol{a+\bar{b}+c+d}$	0	1	0	0	0
$\boldsymbol{a+\bar{b}+c+\bar{d}}$	0	1	0	1	0
	0	1	1	0	1
$\boldsymbol{a+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}}$	0	1	1	1	0
$\boldsymbol{\bar{a}+b+c+d}$	1	0	0	0	0
	1	0	0	1	1
	1	0	1	0	1
	1	0	1	1	1
$\boldsymbol{\bar{a}+\bar{b}+c+d}$	1	1	0	0	0
	1	1	0	1	1
$\boldsymbol{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+d}$	1	1	1	0	0
$\boldsymbol{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}}$	1	1	1	1	0

$$f_1(a,b,c,d) = (a+b+c+d)\cdot(a+b+c+\bar{d})\cdot(a+\bar{b}+c+d)\cdot(a+\bar{b}+c+\bar{d})\cdot(a+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d})\cdot(\bar{a}+b+c+d)\cdot(\bar{a}+\bar{b}+c+d)\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+d)\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d})$$

maxtermes

Remarque : le produit de tous les maxtermes vaut toujours 1.

2ere Méthode : Tableau de Karnaugh

1. $f_1(a,b,c,d) = \bar{b}c + da\bar{b} + da\bar{c} + \bar{d}\bar{a}c$

4 variables $\Rightarrow$ 2^4=16 cases

cd \ ab	**00**	**01**	**11**	**10**
00	0	0	0	0
01	0	0	1	1
11	1	0	0	1
10	1	1	0	1

1° forme canonique *: (somme des produits)*

$$f_1(a,b,c,d) = (\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c\cdot\bar{d}) + (\bar{a}\cdot b\cdot c\cdot\bar{d}) + (a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot d) + (a\cdot\bar{b}\cdot c\cdot\bar{d}) + (a\cdot\bar{b}\cdot c\cdot d) + (a\cdot b\cdot\bar{c}\cdot d)$$

***2° forme canonique** : (produit des sommes)*

$$\overline{f_1(a,b,c,d)} = (\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}) + (\bar{a}\bar{b}\bar{c}d) + (\bar{a}b\bar{c}\bar{d}) + (\bar{a}b\bar{c}d) + (\bar{a}bcd) + (a\bar{b}\bar{c}\bar{d}) + (ab\bar{c}\bar{d}) + (abc\bar{d}) + (abcd)$$

$$f_1(a,b,c,d) = (a+b+c+d)\cdot(a+b+c+\bar{d})\cdot(a+\bar{b}+c+d)\cdot(a+\bar{b}+c+\bar{d})\cdot(a+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d})$$
$$\cdot(\bar{a}+b+c+d)\cdot(\bar{a}+\bar{b}+c+d)\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+d)\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d})$$

2. **La fonction** : $f_2(a,b,c,d) = (a+\bar{b}+\bar{c})(a+\bar{b})(a+\bar{c}+\bar{d})(\bar{a}+b+c+\bar{d})(b+\bar{c}+\bar{d})$

Tableau de Karnaugh

4 variables ⇒ 2^4=16 cases

cd \ ab	**00**	**01**	**11**	**10**
00	1	0	1	1
01	1	0	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	1

- **1° forme canonique :** (somme des produits)

$$f_2(a,b,c,d) = (\bar{a}\cdot\overline{b\cdot}\,\bar{c}\cdot\bar{d}) + (\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot d) + (\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c\cdot\bar{d}) + (a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot\bar{d}) + (a\cdot\bar{b}\cdot c\cdot\bar{d}) + (a\cdot b\cdot\bar{c}\cdot\bar{d})$$
$$+ (a\cdot b\cdot\bar{c}\cdot d) + (a\cdot b\cdot c\cdot\bar{d}) + (a\cdot b\cdot c\cdot d)$$

- **2° forme canonique :** (produit des sommes)

$$\overline{f_2(a,b,c,d)} = (\bar{a}\bar{b}cd) + (\bar{a}b\bar{c}\bar{d}) + (\bar{a}b\bar{c}d) + (a\bar{b}\bar{c}\bar{d}) + (\bar{a}bcd) + (a\bar{b}\bar{c}d) + (a\bar{b}cd)$$

$$f_2(a,b,c,d) = (a+b+\bar{c}+\bar{d})\cdot(a+\bar{b}+c+d)\cdot(a+\bar{b}+c+\bar{d})\cdot(\bar{a}+b+c+d)\cdot(a+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d})$$
$$\cdot(\bar{a}+b+c+\bar{d})\cdot(\bar{a}+b+\bar{c}+\bar{d})\cdot$$

3. Simplification de f_3 en utilisant la méthode de Karnaugh:

- Soit la forme canonique de la fonction logique suivante :

$$f_3(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d + ab\bar{c}d + \bar{a}bcd + abcd + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}bc\bar{d} + a\bar{b}c\bar{d}$$

On fait les regroupements pour éliminer le maximum de variables. Plus le groupe est grand, plus le nombre de variables éliminées est grand (on supprime la ou les variables qui changent).

$$f_3(a,b,c,d) = bd + \bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{d}$$

cd \ ab	**00**	**01**	**11**	**10**
00	1	1		1
01		1	1	
11		1	1	
10	1	1		1

4. Représentation de f_3 par un logigramme.