Université Hassan II - Casablanca
Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et Sociales, Mohammedia.

Licence fondamentale en

SCIENCES EONOMIQUES
Semestre 2

COURS DE

CALCUL DES PROBABILITES

(Partie 1)

Prof : Naciri Abdelali

Année universitaire
2019 – 2020

Table des matières

Chapitre 1 : L'ANALYSE COMBINATOIRE

L'analyse combinatoire ou le dénombrement a pour but de déterminer **le nombre de groupes composés de p éléments choisis à partir d'un ensemble de n éléments.**

Le nombre de groupes formés dépend de deux facteurs :

- **L'ordre des éléments** : La place qu'occupe chaque élément choisi dans le groupe constitué.
  Exemple : On tire deux lettres de l'ensemble des lettres de l'alphabet.
  Un groupe **ab** est différent d'un groupe **ba** (ab#ba), si l'ordre est important, sinon les deux groupes seront comptés comme un seul groupe (ab=ba).
- **La répétition des éléments** : Le nombre de fois qu'un élément peut être choisi dans un même groupe.
  Si un élément ne peut être choisi qu'une seule fois, il n'y a pas de répétition, sinon il y a répétition.
  Exemple : S'il y a répétition, les groupes aa, bb.., formés par une même lettre sont comptés, s'il n'y a pas de répétition, ils ne le seront pas.

Le nombre de groupes où **<u>l'ordre des éléments est important</u>** est déterminé par les **<u>formules des Arrangements</u>**.

Dans le cas où **<u>l'ordre des éléments n'est pas important,</u>** le nombre de groupes est déterminé par les **<u>formules des Combinaisons</u>**.

Remarques :

- La répétition des éléments est possible quand le tirage est fait **avec remise.**
- En cas du **tirage sans remise** (tirage exhaustif), la répétition n'est pas possible.
- Un tirage sans remise correspond soit à tirer un à un les éléments sans remettre l'élément tiré avant d'effectuer le tirage suivant ; soit à tirer les éléments en une seule fois (tirage simultané).

I – Arrangements :

1. Définition :

On appelle **arrangement** de p éléments pris parmi n éléments toute **<u>suite ordonnée</u>** de ces p éléments.

L'ordre des éléments dans les groupes est important.

2. Arrangements sans répétition :

Un arrangement sans répétition est une suite ordonnée de p éléments où un élément **<u>ne peut être choisi qu'une seule fois</u>**.

Le nombre d'arrangements sans répétition est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple :

On tire, sans remise, trois boules dans une urne qui contient dix boules numérotées de 1 à 10. On note le numéro de chaque boule tirée.

De combien de façons peut – on tirer ces trois boules ?

On tire rois boules (p=3) parmi dix boules (n=10).

- L'ordre des boules tirées est important en raison de la numérotation.
- Le tirage est sans remise : La répétition n'est pas possible.

Le nombre de groupes qu'on peut former est égal au nombre d'arrangements sans répétition de 3 éléments choisis parmi 10 éléments.

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$$

3. Arrangement avec répétition

Un arrangement avec répétition est une suite ordonnée de p éléments où un élément **<u>peut être choisi plus d'une fois</u>**.

Le nombre d'arrangements avec répétition est :

$$A_n^p = n^p$$

Exemple :

On tire, avec remise, trois boules dans une urne qui contient dix boules numérotées de 1 à 10. On note le numéro de chaque boule tirée.

De combien de façons peut – on tirer ces trois boules ?

On a ; n = 10 et p = 3 $\rightarrow$ $A_{10}^{3} = 10^3 = 1000$ groupes.

Remarque :

Un arrangement est différent d'un autre soit par **les éléments** qu'il contient soit par **l'ordre** éléments dans le groupe.

4. Permutations :

On appelle permutation de n éléments distincts tout arrangement n à n de ces éléments.

Une permutation est un arrangement avec n = p.

4.1. Permutations sans répétition :

Une permutation sans répétition de n éléments est un arrangement de n éléments où un **élément ne peut figurer qu'une seule fois.**

Le nombre de permutations sans répétition est :

Pn = n ! (n factorielle)

(n ! = n x (n – 1) x (n – 2) x (n – 3) x…………….x 3 x 2 x 1)

Exemple :

On tire sans remise trois boules dans une urne qui contient trois boules numérotées de 1 à 3. On note le numéro de chaque boule tirée.

De combien de façons peut – on tirer ces trois boules ?

On a ; n = 3 et p = 3.

Le nombre de permutations est : P_3 = 3 ! = 6 façons.

4.2. Permutations avec répétition :

Une permutation avec répétition de n éléments est un arrangement de n éléments où un **élément peut figurer plus d'une seule fois.**

Le nombre de permutations sans répétition est :

$$Pn = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_i!}$$

ni : nombre de fois que se répète l'élément i.

II. Combinaisons :

1. Définition :

On appelle combinaison de p éléments choisis parmi n éléments distincts, toute **suite non ordonnée de ces p éléments**.

2. Combinaison sans répétition :

Une combinaison sans répétition est une suite non ordonnée de p éléments où un élément **ne peut être choisi qu'une seule fois**.

Le nombre de combinaisons sans répétition est :

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

Exemple :

3. Combinaison avec répétition :

Une combinaison sans répétition est une suite non ordonnée de p éléments où un élément **<u>peut être choisi plus d'une seule fois</u>**.
Le nombre de combinaisons avec répétition est :

$$K_n^p = C_{(n+p)-1}^p$$

Exemple :

Remarque :

Une combinaison diffère d'une autre si elle ne contient pas les mêmes éléments (l'ordre n'est pas important).

4. Propriétés des combinaisons :

$$C_0^0 = 1$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$$

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{n-p} a^p$$

$(x + a)^n$: Formule du binôme de Newton.

CHAPITRE 2 : CALCUL DES PROBABILITES

1. Notions générales de probabilités :

1.1. Vocabulaire probabiliste :

Expérience aléatoire ou épreuve: Toute expérience dont le résultat est inconnu avant sa réalisation, mais qui appartient à un **ensemble de résultats possibles.**

(**Exemple** : Tirer une carte de jeu, lancer une pièce de monnaie, jeter un dé à six faces, Tirer une boule…).

Ensemble fondamental : Ensemble composé de **tous les résultats possibles** d'une expérience aléatoire.

L'ensemble fondamental est noté par la lettre grecque oméga : **Ω.**

(Exemple : L'ensemble fondamental de l'expérience aléatoire du lancer d'un dé est :

$$\boldsymbol{\Omega} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Un événement : représente **un ou plusieurs résultats possibles** de l'expérience aléatoire.

Si l'événement correspond à un seul résultat possible, il est appelé **événement élémentaire, simple ou éventualité.** S'il correspond à plusieurs résultats possibles, il est appelé **événement composé**.

On dit qu'un événement est réalisé si l'expérience aléatoire donne le résultat ou les résultats qui correspondent à cet événement.

On représente un événement par une lettre en majuscule : A, B, C,…X, Y, Z.

Exemple : On considère l'expérience aléatoire « Lancer un dé ».

Soit A l'événement défini comme : « Avoir un résultat divisible par 6 ».
Le résultat possible qui correspond à A est { 6 }. A se réalise si on obtient le seul résultat 6. A est donc un **événement simple.**

Soit B l'événement défini comme : « Avoir un résultat divisible par 2 ».
Les résultat possibles qui correspondent à B sont { 2, 4, 6 }. B se réalise si on obtient les résultats 2, 4 ou 6. B est donc un **événement composé.**

Soit l'événement C : « Avoir un résultat divisible par 7 ».
Aucun résultat possible ne permet à C de se réaliser. l'événement C est un événement impossible.

Les relations entre les **événements** sont comparées aux relations existantes entre les **ensembles**.

Notations	**Ensembles**	**Evénements**
Ω	Ensemble fondamentale	Evénement certain
$\varnothing$	Ensemble vide	Evénement impossible
A	Sous-ensemble de $\boldsymbol{\Omega}$	Evénement
A U B	Réunion de A et de B	A ou B
A ∩ B	Intersection de A et B	A et B
$A \subset B$	A inclus dans B	A se réalise, B se réalise
$\overline{A}$	Complémentaire de A	Evénement contraire de A
$A \cap B = \varnothing$	Ensembles disjoints	Evénements incompatibles

1.2. Définition d'une probabilité

La probabilité de réalisation d'un événement représente la chance qu'aura cet événement de se réaliser parmi l'ensemble des événements possibles.

La probabilité de réalisation d'un événement A parmi un ensemble d'événements possibles est le **rapport** entre les résultats possibles qui permettent à A de se réaliser, appelés **cas favorables** à A, et l'ensemble des résultats possibles, appelés **cas possibles**.

$$P(A) = \frac{Cas\ favorables}{Cas\ possibles} \quad [\text{ou } P(A) = \frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)}]$$

Card A (Cardinal de A) : Nombre d'éléments que contient l'ensemble A.
Card Ω : Nombre d'éléments que contient l'ensemble Ω.

Exemple 1:

Pour l'expérience aléatoire « Lancer un dé ».
A : « Avoir un résultat divisible par 6 »
Un seul résultat possible {6} favorable à A parmi les six résultats possibles.

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

B : « Avoir un résultat divisible par 2 ».
Trois résultats possibles {2, 4, 6} qui sont favorables à B.

$$P(B) = \frac{3}{6}$$

Dans cette expérience, chaque face du dé a la même probabilité égale à $\frac{1}{6}$, qui correspond à $\frac{1}{\Omega}$, on parle d'équiprobabilité ou de probabilité uniforme égale à $\frac{1}{n}$.

Exemple 2 :

Soit une urne qui contient quatre boules blanches et 3 boules rouges. On tire une boule de cette urne.

Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?
Soit l'événement B : « Tirer une boule blanche ».
Chaque boule dans l'urne a la même probabilité d'être tirée qui est égale à $\frac{1}{7}$.
On a quatre boules blanches et chacune a une probabilité égale à $\frac{1}{7}$ d'être choisie.
La probabilité de l'événement B est la somme des probabilités de choisir chaque boule blanche :

$$P(B) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \mathbf{\frac{4}{7}}$$

Exemple 3 :

On jette une pièce de monnaie deux fois. On note chaque fois le résultat obtenu.
Quelle est la probabilité d'obtenir une seule fois pile ?
Chaque jet de la pièce de monnaie donne deux résultats Pile (P) ou Face (F).
L'expérience aléatoire consiste à lancer la pièce de monnaie deux fois. Les résultats possibles correspondent aux résultats des deux jets.
L'ensemble des résultats possibles est Ω = {PP, PF, FP, FF}
Soit l'événement A : « Obtenir une seule fois pile ».
Sur les quatre résultats possibles, il y a deux résultats possibles qui permettent à l'événement A de se réaliser : PF ou FP.

$$P(A) = P(PF) + P(FP) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

Remarques :

Les résultats favorables à un événement ne peuvent être supérieurs à l'ensemble des résultats possibles qui constituent l'ensemble Ω.
Résultats favorables ≤ Résultats possibles.
Suite à cette inégalité, une probabilité est un pourcentage qui varie entre 0 et 1.
0 ≤ P(A) ≤ 1

- P(A) = 0 : A est un événement impossible, (A = ∅).
- P(A) = 1 : A est un événement certain, (A = Ω).
- P(A) + P($\overline{A}$) = 1. $\overline{A}$ est l'événement contraire à A. Si A ne se réalise pas, c'est obligatoirement $\overline{A}$ qui se réalise. On dit que $\overline{A}$ et A sont incompatibles.
- Soient Ai un ensemble d'événements. Ai forment un système complet si :
  - Ai sont deux à deux incompatibles : pour i≠j on a P(Ai∩Aj) = 0.
    P(A1 U A2 U A3 U……UAn) = P(A1) + P(A2) + …….+ P(An).
  - La réunion des Ai donne l'ensemble Ω, ce qui donne P(UAi)=1.
    P(A1) + P(A2) + …….+ P(An) = 1.
- Un **ensemble probabilisé (Ω, A, P)** est déterminé par l'ensemble fondamental Ω qui représente l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire, par les événements A qu'on peut définir sur la base des résultats possibles de l'ensemble Ω, et par P qui correspond à la probabilité de chaque événement A défini au sein de l'ensemble Ω.

II. Formules de calcul des probabilités :

1. Formule de calcul des probabilités totales :

Soient deux événements A et B définis sur l'ensemble des événements de l'ensemble probabilisé (Ω, A, P).

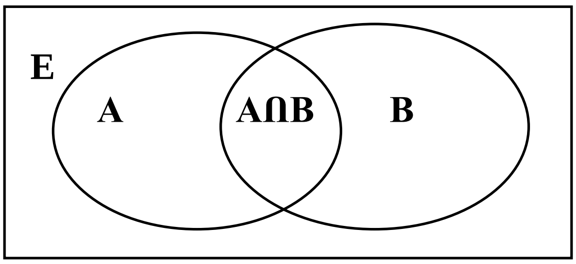
L'axiome de calcul des probabilités totales permet de calculer la **probabilité de réalisation de l'événement A ou de l'événement B**.

Le calcul de la probabilité de réalisation de A ou de B est donné par l'addition de la probabilité de réalisation de A plus la probabilité de réalisation de B en corrigeant par la soustraction de la probabilité que les deux événements se réalisent en même temps.

La réalisation de A ou de B correspond en théorie des ensembles à l'ensemble (A U B).

Les éléments appartenant à l'ensemble (A U B) correspondent aux éléments qui appartiennent à A ou à B, moins les éléments qui appartiennent en même temps à A et à B (ces éléments sont comptés deux fois, avec les éléments de A et avec les éléments de B).

P(A U B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

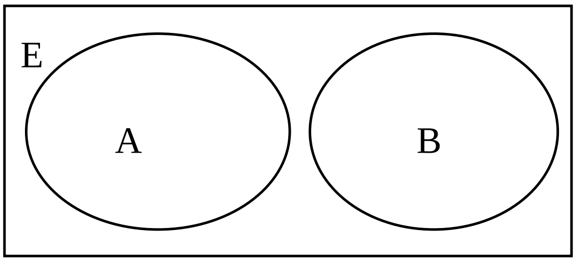


Démonstration:

- **Si (A ∩ B) ≠ ∅.**
  On a : A U B = A U (B - (A ∩ B))
  Si on écrit B = [B - (A ∩ B)] U (A ∩ B)
  On aura A U B = A U [{(B - (A ∩ B)) U (A ∩ B)} - (A ∩ B)]
  Donc: P(A U B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B) + P(A ∩ B) - P(A ∩ B)
  ⇒ **P(A U B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B).**
- **Si (A ∩ B) = ∅.** A et B sont des ensembles disjoints qui n'ont aucun élément en commun.

Pour les événements, cela signifie que A et B sont **deux événements incompatibles**. Si A se realise alors B ne peut se realiser et inversemment.

Ensembles disjoints:



Si A et B sont deux ensembles disjoints, l'ensemble (A U B) est composé des éléments appartenant à A plus les éléments appartenant à B.

(A U B) = A + B

Si A et B sont deux événements incompatibles, la chance qu'ils se réalisent tous les deux en même temps est nulle: $P(A \cap B) = 0$.

La formule de calcul des probabilités totales deviant:

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Généralisation:

Soient A, B et C trois événements définis à partir de l'ensemble fondamental Ω avec les probabilités relatives P(A), P(B) et P(C**).**

$$\mathbf{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)}$$

Si les **événements A, B et C sont incompatibles deux à deux**:

$P(A \cap B) = 0$, $P(A \cap C) = 0$ et $P(B \cap C) = 0$

on aura:

$$\mathbf{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)}$$

Exemple:

Dans une classe, on a neuf étudiants qui parlent le français, sept étudiants qui parlent anglais et cinq étudiants qui parlent espagnol.

Parmi les étudiants qui parlent français, il y a deux étudiants qui parlent également l'anglais.

On tire au hasard un étudiant de cette classe.

1. Quelle est la probabilité de choisir un étuduant qui parle français ou anglais?
2. Quelle est la probabilité de choisir un étuduant qui parle français ou l'espagnol?
3. Quelle est la probabilité de choisir un étuduant qui par le français, l'anglais ou l'espagnol?

Réponse:

L'expérience aléatoire réalisée est "Choisir un étudiant de la classe".

Les résultats possibles de cette expérience sont: “L’étudiant parle français”, “L’étudiant parle anglais” et “L’étudiant parle français”.

Soient les événements suivants:

F : « L’étudiant choisi parle le français »,

A : « L’étudiant choisi parle l’anglais »,

E : « L’étudiant choisi parle l’espagnol ».

L’ensemble des étudiants dans la classe est la somme du nombre des étudiants qui parlent français (9), du nombre des étudiants qui parlent anglais (7) et du nombre des étudiants qui parlent l’espagnol (5). Ce qui fait un total de 21 étudiants. Mais, il faut tenir compte que deux étudiants sont comptés parmi les étudiants qui parlent français et en même temps parmi les étudiants qui parlent l’anglais.

Le total réel des étudiants dans la classe est : 21 – 2 = 19.

On aura alors les probabilités suivantes :

$P(F) = \frac{9}{19},\ P(A) = \frac{7}{19},\ P(E) = \frac{5}{19}$

$P(F \cap A) = \frac{2}{19},\ P(F \cap E) = 0\ et\ P(A \cap E) = 0.$

1. La probabilité que l’étudiant choisi parle le français ou angalais, est:

   $P(F \cup A) = P(F) + P(A) - P(F \cap A) = \frac{9}{19} + \frac{7}{19} - \frac{2}{19} = \frac{14}{19}$

2. La probabilité que l’étudiant choisi parle le français ou l’espagnol , est:

   $P(F \cup E) = P(F) + P(E) - P(F \cap E) = \frac{9}{19} + \frac{5}{19} - 0 = \frac{14}{19}$

3. La probabilité que l’étudiant choisi parle le français, l’anglais ou l’espagnol , est:

   $P(F \cup A \cup E) = P(F) + P(A) + P(E) - P(F \cap A) - P(F \cap E) - P(A \cap E) + P(F \cap A \cap E)$

   $= \frac{9}{19} + \frac{7}{19} + \frac{5}{19} - \frac{2}{19} - 0 - 0 + 0 = \frac{19}{19} = 1.$

2. Formule des probabilités conditionnelles :

Soient deux événements A et B définis sur l’ensemble des événements de l’ensemble probabilisé (Ω, A, P).

La formule de calcul des probabilités conditionnelles permet de calculer la **probabilité de réalisation de l’événement A sachant que l’événement B s’est réalisé.** Cette probabilité est notée P(A/B).

P(A/B) = Probabilité de A sachant B (ou Probabilité de A liée à B).

La probabilité conditionnelle P(A/B) correspond à la probabilité que les deux événements A et B se réalisent c’est-à-dire $P(A \cap B)$, de laquelle on doit éliminer la probabilité de l’événement qui s’est déjà réalisé c’est-à-dire P(B).

On aura alors : $\mathbf{P\left(A/B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$

On peut aussi calculer : $\mathbf{P}\left(\mathbf{B}/_{\mathbf{A}}\right) = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(A)}}$

La probabilité conditionnelle P(A/B) exprime la relation qui peut exister entre la probabilité de réalisation de l'événement A et la réalisation de l'événement B.

La probabilité de A peut changer ou non si on sait que B est déjà réalisé.

Si la réalisation de B n'a aucun effet sur la probabilité de réalisation de A, on dit que les deux événements A et B indépendants.

Si A et B sont deux **événements indépendants,** la probabilité conditionnelle P(A/B) devient une probabilité simple égale à P(A). c'est-à-dire que la probabilité de A ne change pas soit que l'événement B est déjà réalisé ou non.

La probabilité conditionnelle P(B/A) sera égale à P(B).

On aura alors : **P(A/B) = P(A)** et **P(B/A) = P(B).**

Remarque :

- Si A est indépendant de B, alors B est indépendant de A. L'indépendance est une relation réciproque.
- Si A est indépendant de B, alors A est indépendant de $\overline{B}$. B est aussi indépendant de $\overline{A}$, $\overline{A}$ est indépendant de $\overline{B}$; et $\overline{B}$ est indépendant de $\overline{A}$.
  On aura : $P(A/\overline{B}) = P(A)$, $P(B/\overline{A}) = P(B)$, $P(\overline{B}/A) = P'\overline{B})$,
  $P(\overline{A}/\overline{B}) = P(\overline{A})$ et $P(\overline{B}/\overline{A}) = P(\overline{B})$.

Exemple 1:

Une urne contient quatre boules blanches et trois boules rouges. On tire successivement et sans remise deux boules de cette urne.

Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche sachant qu'on a tiré une boule rouge ?

Soient les deux événements :

B : « Tirer une boule blanche »,

R : « Tirer une boule rouge ».

Les probabilités élémentaires sont : P(B) = $\frac{4}{7}$ et P(R) = $\frac{3}{7}$.

La probabilité demandée est P(B/R), la probabilité de tirer une boule blanche sachant qu'on a tiré une boule rouge.

Pour le deuxième tirage on aura six boules dans l'urne (tirage sans remise) où il y a quatre boules blanches.

Donc : $P(^{B}/_{R}) = \frac{4}{6}$.

Cette probabilité $P(^{B}/_{R})$ qui est égale à $\frac{4}{6}$ est différente de la probabilité élémentaire P(B) qui est égale à $\frac{4}{7}$. Les deux événements B et R sont alors dépendants car le tirage est sans remise.

Si on considère que le tirage est avec remise. Le nombre de boules sera toujours le même à chaque tirage.

La probabilité P(B/R) sera égale à $\frac{4}{7}$ qui est la même probabilité élémentaire de B, P(B).

Alors : $P(B/R) = P(B) = \frac{4}{7}$.

Le tirage avec remise rend les événements indépendants.

Exemple 2 :

On lance une pièce de monnaie deux fois. On note à chaque fois le résultat obtenu.

Quelle la probabilité d'avoir Pile sachant qu'on a obtenu Face ?

Soient les deux événements suivants : P : « Avoir Pile » et F : « Avoir Face ». Les probabilités élémentaires sont P(P) = ½ et P(F) = ½.

La probabilité demandée est P(P/F).

Les deux événements P et F sont indépendants, et la probabilité d'avoir Pile dans le deuxième jet ne dépend pas du résultat du premier jet.

Donc, P(P/F) = P(P) = ½ .

3. Formule des probabilités composées :

Soient deux événements A et B définis sur l'ensemble des événements de l'ensemble probabilisé (Ω, A, P).

L'axiome des probabilités composées permet de calculer la **probabilité de réalisation simultanée des deux événements A et B**. (A et B doivent se réaliser).

La probabilité de réalisation de **A et de B** est déterminée par la multiplication de la probabilité de réalisation de A et de la probabilité de réalisation de B sachant la réalisation de A.

La réalisation de A et de B correspond en théorie des ensembles à l'ensemble **(A ∩ B).**

La probabilité de réalisation simultanée de A et de B est :

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B/A) = P(B).P(A/B)}$$

Si A et B sont indépendants on aura : P(A/B) = P(A) et P(B/A) = P(B).

La probabilité simultanée devient: $\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)}$

Remarques:

- $\mathbf{P(A \cap B \cap C) = P(A) \,.\, P(B/A) \,.\, P(C/A \cap B)}$
- Si les trois événements sont indépendants, on aura:

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

- **$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$**
- **$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B})$**

Exemple 1:

Une urne qui contient quatre boules blanches et trois boules rouges. On tire sans remise deux boules.

La probabilité de tirer deux boules blanches est:

$P(B \cap B) = P(B) \cdot P(B/B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$

Si le tirage est avec remise, les événements seront indépendants et on aura:

$P(B \cap B) = P(B) \cdot P(B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$

La probabilité de tirer une boule rouge et une boule blanche est:

$P(R \cap B) = P(R) \cdot P(B/R) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$

Ou $P(B \cap R) = P(B) \cdot P(R/B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$

La probabilité de tirer trois boules blanches est:

$P(B \cap B \cap B) = P(B) \cdot P(B/B) \cdot P(B/B\cap B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$

Si le tirage est avec remise, on aura:

$P(B \cap B \cap B) = P(B) \cdot P(B) \cdot P(B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{64}{245}$

Exemple 2 :

Lancer une pièce de monnaie deux fois.

La probabilité d'avoir deux fois pile est : $P(P \cap P)$

$P(P \cap P) = P(P) \cdot P(P/P)$

Les deux lancers sont indépendants, et la probabilité d'avoir Pile dans le deuxième jet ne dépend pas du résultat du premier jet.

Donc, $P(P \cap P) = P(P) \cdot P(P) = ½ \cdot ½ = \frac{1}{4}$

La probabilité d'avoir Pile et Face est : $P(P \cap F)$ ou $P(F \cap P)$

$P(P \cap F) = P(P) \cdot P(F) = ½ \cdot ½ = \frac{1}{4}$

4. Théorème de Bayes :

Le théorème de Bayes permet de calculer la probabilité conditionnelle des événements Ai qui interviennent pour la réalisation d'un événement global B. L'événement B ne se réalise pas de lui-même, mais il se réalise en partie avec chacun des événements Ai appelés causes. La probabilité calculée est appelée probabilité des causes.

Soient les données suivantes :

- Les événements Ai qui représentent toutes les causes qui permettent à B de se réaliser. Ces événements doivent satisfaire aux conditions suivantes:

* Incompatibles deux à deux : $\forall$ i $\neq$ j : P(Ai∩Aj) = 0.

* Leur réunion donne l'ensemble fondamental : A1 U A2 U…U An =Ω.

- La probabilité de réalisation de chaque événement P(Ai) est connue, et la probabilité de réalisation de l'événement B sachant chaque événement P(B/Ai) est connue

Le théorème de Bayes permet de calculer la probabilité que, si B se réalise, un événement A parmi les événements Ai soit la cause. Cette probabilité correspond à la probabilité de réalisation de A sachant que B s'est réalisé : **P(Ai/B).**

C'est une probabilité conditionnelle qui peut être écrite comme suit:

$$P\left({}^{Ai}/_{B}\right) = \frac{P(Ai\cap B)}{P(B)}$$

P(Ai∩B) peut être facilement calculée à partir des probabilités déjà connues P(Ai) et P(B/Ai).

Mais la probabilité P(B) ne peut pas être calculée directement car l'événement B ne se réalise pas de lui-même mais il se réalise avec la réalisation des événements Ai. B se réalise avec A1, ou avec A2, …..ou avec An. Cela peut s'écrire : B = (A1∩B) U (A2∩B) U (A3∩B) U …….. U (An∩B).

On aura : P(B) = P[(A1∩B) U (A2∩B) U (A3∩B) U …….. U (An∩B)].

Les événements Ai sont incompatibles deux à deux, les événements (Ai∩B) seront aussi incompatibles, ce qui permet d'écrire la probabilité P(B) comme suit :

P(B) = P(A1∩B) + P(A2∩B) + P(A3∩B) + …….. + P(An∩B).

= P(A1).P(B/A1) + P(A2).P(B/A2) + …….. + P(An).P(B/An).

Donc:

$$P\left({}^{Ai}/_{B}\right) = \frac{P(Ai).P\left({}^{B}/_{Ai}\right)}{P(A1).P\left({}^{B}/_{A1}\right) + P(A2).P\left({}^{B}/_{A2}\right) + \cdots + P(An).P\left({}^{B}/_{An}\right)}$$

La formule de Bayes peut s'écrire : $\boxed{\mathbf{P\left({}^{Ai}/_{B}\right) = \frac{P(Ai).P\left({}^{B}/_{Ai}\right)}{\sum_{I=1}^{n} P(Ai).P\left({}^{B}/_{Ai}\right)}}}$

Exemple :

Soit une urne qui contient quatre boules blanches numérotées de 1 à 4 ; et six boules rouges numérotées de 5 à 10.

On tire une boule de cette urne, on gagne si le tirage donne une boule qui porte un numéro pair, sinon il n'y a pas de gain.

Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche sachant qu'on a gagné ?

Soient les événements suivants :

B : « Tirer une boule blanche »,

R : « Tirer une boule rouge »,

G : « tirer une boule qui permet de gagner ».

On a les probabilités suivantes :

$P(B) = \frac{4}{10}$, $P(R) = \frac{6}{10}$, $P\left(G/_B\right) = \frac{2}{10}$ et $P\left(G/_R\right) = \frac{3}{10}$.

La probabilité demandée est : P(B/G).

$$P\left(B/_G\right) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{P(B).P(G/B))}{P[(B \cap G) \cup (R \cap G)]}$$

$$= \frac{P(B).P(G/B))}{[P(B).P(G/_B)]+[P(R).P(G/_R)]} = \frac{\frac{4}{10}.\frac{2}{10}}{\left(\frac{4}{10}.\frac{2}{10}\right)+\left(\frac{6}{10}.\frac{3}{10}\right)} = \frac{8}{26}$$

La probabilité de tirer une boule rouge sachant qu'on a gagné est :

$$P\left(R/_G\right) = \frac{P(R \cap G)}{P(G)} = \frac{P(R).P(G/R))}{P[(B \cap G) \cup (R \cap G)]}$$

$$= \frac{P(R).P(G/R))}{[P(B).P(G/_B)]+[P(R).P(G/_R)]} = \frac{\frac{6}{10}.\frac{3}{10}}{\left(\frac{4}{10}.\frac{2}{10}\right)+\left(\frac{6}{10}.\frac{3}{10}\right)} = \frac{18}{26}$$

On peut aussi calculer cette probabilité P(R/G) en passant par l'événement contraire. L'événement contraire à P(R/G) est l'événement P(B/G). Si ce n'est pas la boule rouge qui nous a permis de gagner, alors c'est la boule blanche qui a permis de gagner.

On aura : P(R/G) = 1 – P(B/G) = 1 – $\frac{8}{26} = \frac{18}{26}$

CHAPITRE 3 : LES VARIABLES ALEATOIRES

Introduction :

Définir une variable aléatoire a pour objectif de pouvoir travailler sur l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire en **donnant à chacun des événements définis à partir de ces résultats possibles une valeur numérique**.

Généralement, on définit une variable aléatoire comme une fonction mathématique qui associe aux événements de l'ensemble fondamental Ω des valeurs dans l'ensemble des réels R.

On note une variable aléatoire par une lettre en majuscule (exemple : X, Y, Z).

Si cette variable aléatoire peut prendre des **valeurs entières** (exemple : X=1, 2, 3, …..), on parle d'une **variable discrète**. Si au contraire, elle ne peut pas prendre des valeurs entières, et ne peut qu'appartenir à un **intervalle** (exemple : $X \in [1,2[$), on parle d'une **variable continue**.

1. Variable aléatoire discrète :

1.1. Définition d'une variable aléatoire discrète :

Une **variable aléatoire discrète** est une variable aléatoire qui peut prendre **des valeurs entières** ($X : \Omega \rightarrow N$).

$$X = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. n.$$

Une variable aléatoire discrète permet d'associer aux **événements** appartenant à l'ensemble fondamental Ω des **valeurs numériques**.

Exemple :

On lance une pièce de monnaie trois fois.

Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de fois qu'on a obtenu Pile.

Les résultats possibles de l'expérience sont présentés dans l'ensemble fondamental.

Ω = {PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF}

On a X : « Nombre de Piles obtenus ».

Chaque résultat possible de Ω sera remplacé par une valeur numérique sur la base de la définition de la variable aléatoire X.

Une variable aléatoire permet de travailler avec des valeurs numériques au lieu de travailler avec les événements.

On aura :

X = 0, correspond à l'événement avoir trois Face et aucune fois Pile.

$X = 1$, correspond à l'événement avoir une seule fois Pile, composé de trois résultats possibles.
$X = 2$, correspond à l'événement avoir deux fois Pile, composé de trois résultats possibles.
$X = 3$, correspond à l'événement avoir trois fois Pile.

Les valeurs de la variable aléatoire sont présentées dans un tableau :

Evénement (Résultats possibles)	**FFF**	**PFF, FPF, FFP**	**PPF, PFP, FPP**	**PPP**
Valeur de X	**0**	**1**	**2**	**3**

Après la détermination des **valeurs** d'une variable aléatoire, la deuxième étape est la détermination de la probabilité de chacune de ces valeurs.

On dit qu'on détermine la **loi de probabilité** de la variable aléatoire.

1.2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète:

On définit une **loi de probabilité** d'une variable aléatoire, si à chaque valeur possible de la variable aléatoire on associe la probabilité de l'événement qui lui correspond.

On note une loi de probabilité par **$P(X= x_i)$**

X : représente la variable aléatoire,

x_i : représente une valeur de la variable aléatoire X.

Pour calculer la probabilité d'une valeur de la variable aléatoire, on revient aux événements qui ont permis d'avoir cette valeur.

Exemple :

X : « Nombre de Piles obtenus ».

On aura :

$\mathbf{P(X=0)} = P(F \cap F \cap F) = P(F).\ P(F/F).\ P(F/F\cap F)$
$= P(F).\ P(F).\ P(F) = ½ . ½ . ½ = \mathbf{1/8}$

$\mathbf{P(X=1)} = P[(P \cap F \cap F) \cup (F \cap P \cap F) \cup (F \cap F \cap P)]$
$= P(P \cap F \cap F) + P(F \cap P \cap F) + P(F \cap F \cap P)$
$= P(P).\ P(F).\ P(F) + P(F).\ P(P).\ P(F) + P(F).\ P(F).\ P(P)$
$= ½ . ½ . ½ + ½ . ½ . ½ + ½ . ½ . ½ = \mathbf{3/8}$

$\mathbf{P(X=2)} = P[(P \cap P \cap F) \cup (P \cap F \cap P) \cup (F \cap P \cap P)]$
$= P(P \cap P \cap F) + P(P \cap F \cap P) + P(F \cap P \cap P)$
$= P(P).\ P(P).\ P(F) + P(P).\ P(F).\ P(P) + P(F).\ P(P).\ P(P)$
$= ½ . ½ . ½ + ½ . ½ . ½ + ½ . ½ . ½ = \mathbf{3/8}$

$\mathbf{P(X=3)} = P(P \cap P \cap P) = P(P).\ P(P).\ P(P) = ½ . ½ . ½ = \mathbf{1/8}$

Le tableau de la variable aléatoire sera ainsi :

X	0	1	2	3	$\sum P(X=xi)$
Pi	**1/8**	**3/8**	**3/8**	**1/8**	**1**

P(X= xi) peut être noté simplement Pi.

Il faut vérifier que la somme des probabilités des valeurs de la variable aléatoire est égale à l'unité 1.

$$\sum P(X= xi) = 1$$

A partir du tableau présentant les valeurs et la loi de probabilité d'une variable aléatoire, on peut faire tout le travail statistique notamment le calcul de l'espérance mathématique (moyenne) et l'écart-type.

1.3. Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète :

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète représente la courbe cumulative de la variable.

Une variable aléatoire discrète peut être représentée graphiquement, comme le cas d'un caractère statistique discret, par un **diagramme en bâtons**, et sa fonction de répartition par une **courbe en escalier**.

La fonction de répartition est définie par : **F(xi) = P(X<xi)**

F(xi) pour la valeur xi est la somme des probabilités de toutes les valeurs inférieures à la valeur xi.

$F(x) = 0$ sur $]-\infty\ , x1[$: Pour la première valeur $F(x) = 0$,

$F(x) = 1$ sur $[xn\ , +\infty[$: Pour la dernière valeur $F(x) = 1$.

Exemple :

On détermine la fonction de répartition pour la variable aléatoire X définie par « Nombre de Piles obtenus ».

$x = 0 : F(X< 0) = 0$,

$x = 1 : F(X< 1) = P(X= 0) = 1/8$

$x = 2 : F(X< 2) = P(X= 0) + P(X = 1) = 1/8 + 3/8 = 4/8$

$x = 3 : F(X< 3) = P(X= 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8$

$x \geq 3 : F(3) = P(X= 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 8/8 = 1$.

2. Variable aléatoire continue :

2.1. Définition d'une variable aléatoire continue :

Une **variable aléatoire est dite continue** si elle **ne peut pas prendre des**

valeurs entières, ses valeurs **appartiennent à des intervalles** (exemple : X∈ [1,2[).

Son ensemble de définition est fini ou infini non dénombrable, donné sous forme d'intervalle.

Une variable aléatoire continue ne peut pas prendre des valeurs précises (X=xi), car on ne peut pas isoler une valeur dans un intervalle.

Exemples de variables aléatoires continues : Temps, distance, Taille.

Les probabilités calculées pour une variable aléatoire continue sont des probabilités pour des intervalles. On ne peut calculer **la probabilité que pour une valeur de X appartenant à un intervalle qu'on détermine ses limites**.

La probabilité calculée est : **P(a<X<b).** (X ∈ [a, b[).

Remarque :

Pour une variable aléatoire continue la probabilité d'une valeur précise est égale à 0 : P(X=xi) = 0. On ne peut déterminer que ce qu'on appelle la **densité de probabilité** pour cette valeur, déterminée par : $P(x \leq X \leq x+\Delta x)$, avec Δx, une petite variation autour de x ($\Delta x \rightarrow 0$).

Pour une variable aléatoire continue, on ne parle pas loi de probabilité, mais de **fonction de densité de probabilité.**

2.2. Fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire continue :

Le calcul des probabilités des valeurs d'une variable aléatoire continue est déterminé par une **fonction de densité de probabilité,** notée **f(x).**

La densité de probabilité f(x) au point x est égale à la valeur limite de la densité de l'intervalle [x, x+Δx] quand Δx tend vers 0 :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

La probabilité ainsi donnée par la fonction f(x) aux valeurs de X est déterminée par la somme des probabilités d'un intervalle auquel appartient X :

Pour X ∈ [a, b] : $P((\mathbf{a \leq X \leq b}) = \int_a^b \boldsymbol{f(x)dx}$

$$= [\boldsymbol{F(x)}]_a^b$$

$$= \mathbf{F(b) - F(a)}$$

Avec F(x) la fonction de répartition de la variable aléatoire X déterminée à partir de la fonction primitive de f(x).

La fonction f(x) doit vérifier deux conditions pour qu'elle soit une fonction de densité de probabilité de X :

- **f(x) doit être une fonction positive** : Pour tout x appartenant au domaine de définition de la variable X on doit avoir f(x) > 0,
- La somme de toutes les probabilités f(x) données par la fonction de densité

de probabilité aux valeurs de X est égale à l'unité 1.

$$\int_a^b f(x)dx = 1$$

Exemple :

Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}.x \qquad \text{si } 0 \leq x \leq 2$$
$$f(x) = 0 \qquad \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 2$$

Quelle est la probabilité que X soit inférieure à 1 ?

On vérifie que f(x) est une fonction de densité de probabilité qui permet de calculer les probabilités pour les valeurs de X.

- f(x) a comme domaine de définition l'intervalle [0, 2]. f(x) donne une image égale à $\frac{1}{2}.x$ pour toute valeur de X appartenant à [0, 2].
  Pour tout x ∈ [0, 2], f(x) est positive.
- Calcul de la somme des probabilités sur l'intervalle [0, 2].
  On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_2^{+\infty} f(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + + \int_0^2 \frac{1}{2}.x\ .dx + \int_2^{+\infty} 0.dx$$
$$= \int_0^2 \frac{1}{2}.x\ .dx$$
$$= [\frac{1}{4}.\boldsymbol{x^2}]_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{2}} = F(2) – F(0) = 1 – 0 = 1$$

La somme des probabilités est égale à l'unité 1.

La fonction f(x) est une fonction de densité de probabilité de la variable X aléatoire X.

La probabilité que X soit inférieure à 1 est :

$$P(X < 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_0^1 \frac{1}{2}.x.dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}.x.dx$$
$$= [\frac{1}{4}.\boldsymbol{x^2}]_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{1}} = F(1) – F(0) = 1/4 – 0 = ¼.$$

Pour déterminer la fonction de répartition de la variable X est, on détermine F(x) sur chacun des intervalles où f(x) prend ses valeurs.

- x < 0 : F(0) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (on fait un changement de variable, x devient une valeur qui tend vers la borne supérieure 0)
  $= \int_{-\infty}^{x} 0\ dt \ = 0$
- x < 2 : F(2) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (avec x une valeur qui tend vers 2)

$= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt \quad + \int_{0}^{x} f(t)dt$

$= \int_{-\infty}^{0} 0.dt \quad + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}.tdt$

$= 0 + [\frac{1}{4}.\boldsymbol{t^2}]_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{4}.\boldsymbol{x^2}$

- $x \geq 2$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (avec x une valeur qui tend vers $+\infty$)

$= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt \quad + \int_{0}^{2} f(t)dt \quad + \int_{2}^{x} f(t)dt$

$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt \quad + \int_{0}^{2} \frac{1}{2}.\mathbf{t}.\,dt \quad + \int_{2}^{x} 0\,dt$

$= \int_{0}^{2} \frac{1}{2}.\boldsymbol{t}.dt \; = [\frac{1}{4}.\mathbf{t^2}]_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}}$ = F(2) – F(0) = 4/4 = 1

La fonction de répartition est :

F(x) = 0, pour x < 0.

F(x) = $\frac{1}{4}.\boldsymbol{x^2}$, pour x < 2.

F(x) = 1, pour x ≥ 2.

3. Caractéristiques d’une variable aléatoire :

La détermination des valeurs d’une variable aléatoire et les probabilités associées à ces valeurs permet d’effectuer le travail statistique de détermination des caractéristiques de tendance centrale (espérance mathématique) et de dispersion (écart-type).

3.1. Espérance mathématique d’une variable aléatoire :

L’espérance mathématique d’une variable aléatoire correspond à la moyenne arithmétique d’un caractère statistique. Elle peut être calculée par la multiplication des valeurs de la variable X et les probabilités correspondantes à ces valeurs.

On note l’espérance mathématique d’une variable aléatoire X par : **E(X).**

3.1.1. Espérance mathématique d’une variable aléatoire discrète :

L’espérance mathématique d’une variable aléatoire discrète correspond à la pondération des valeurs de X par leurs probabilités P(X = xi).

$$\mathbf{E(X) = \sum xi.\, P(X = xi)}$$

Exemple :

X : « Nombre de Piles obtenues ».

X	0	1	2	3	∑P(X=xi)
Pi	1/8	3/8	3/8	1/8	1

$E(X) = \sum xi.\ P(X = xi)$

$= 0\ .\ 1/8 + 1\ .\ 3/8 + 2\ .\ 3/8 + 3\ .\ 1/8 = 12/8 = 1{,}5$

Le nombre moyen de Piles est égal à 1,5.

3.1.2. Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue correspond à la pondération des valeurs de X par leurs probabilités f(x).

$$\mathbf{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.\,f(x)dx}$$

Exemple :

La fonction f(x) définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}.x \qquad \text{si } 0 \le x \le 2$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 2$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.\,f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x.\,f(x)dx\ \int_{0}^{2} x.\,f(x)dx + \int_{2}^{+\infty} x.\,f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x.\,0\ dx\ \int_{0}^{2} \frac{1}{2}.x^2dx + \int_{2}^{+\infty} x.\,0dx$$

$$= \int_{0}^{2} \frac{1}{2}.x^2dx$$

$$= [\frac{1}{6}.x^3]_0^2 = F(2) - F(0) = \frac{8}{6} - 0 = \frac{8}{6}.$$

3.1.3. Propriétés de l'espérance mathématique :

Les propriétés de l'espérance mathématique permettent de calculer l'espérance mathématique de différentes relations mathématiques qu'on peut faire entre des variables aléatoires dont les espérances mathématiques sont connues.

L'espérance mathématique est un opérateur linéaire qui n'introduit pas de changements sur les relations mathématiques entre les variables aléatoires. Cela signifie que les relations entre les variables aléatoires sont les mêmes relations qui lient leurs espérances mathématiques.

Soient X et Y deux variables aléatoires d'espérances mathématiques respectives E(X) et E(Y).

On peut calculer les espérances suivantes :

- **E(a) = a**. L'espérance d'une constante est la constante elle-même.
- **E(aX + b) = a.E(X) + b**

  On a : $E(aX + b) = \sum (axi + b).\ P(X=xi)$

  $= \sum [axi.\ P(X=xi) + b.\ P(X=xi)]$

  $= \sum axi.\ P(X=xi) + \sum b.\ P(X=xi)$

$= a.\sum xi.\ P(X{=}xi) + b.\sum P(X{=}xi)$
$= a.E(X) + b. \qquad (\sum P(X{=}xi) = 1)$

- **E(X + Y) = E(X) + E(Y)**
  On a : $E(X + Y) = \sum(xi + yi).\ P(X = xi, Y = yi)$
  $= \sum[xi.\ P(X = xi, Y = yi) + yi.\ P(X = xi, Y = yi)]$
  $= \sum xi.\ P(X = xi, Y = yi) + \sum yi.\ P(X = xi, Y = yi)$
  $= \sum xi.\ P(X = xi) + \sum yi.\ P(Y = yi)$
  $= E(X) + E(Y)$
- **E(X – Y) = E(X) – E(Y)**
- **E(X.Y) = E(X) . E(Y)** (Si X et Y sont indépendantes).
  On a : $E(X.Y) = \sum xiyi.\ P(X = xi, Y = yi)$
  $= \sum xiyi.\ P(X = xi)\ .\ P(Y = yi)$
  $= \sum xi\ P(X = xi)\ .\ \sum yi.P(Y = yi)$
  $= E(X)\ .\ E(Y)$
  (Si X et Y sont indépendantes on a : $P(X{=}\ xi, Y = yi){=}\ P(X\ {=}xi).P(Y = yi)$)
- Si X1, X2, …..Xn , sont n variables aléatoires qui ont la même espérance mathématique égale à m, on peut alors calculer l'espérance mathématique de la moyenne de ces variables aléatoires :

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{X1+X2+\cdots\ldots\ldots\ldots+Xn}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n}.\ E(X1 + X2 + \ldots\ldots Xn)$$
$$= \frac{1}{n}.\ [E(X1) + E(X2) + \ldots\ldots + E(Xn)]$$
$$= \frac{1}{n}.\ [m + m + \ldots\ldots\ldots + m]$$
$$= \frac{1}{n}.\ nm = m$$
$$\mathbf{E(\overline{X}) = m}$$

3.2. Variance et écart – type d'une variable aléatoire :

La variance est un indicateur de dispersion qui permet de mesurer la dispersion des valeurs d'une variable aléatoire autour d'une valeur centrale qui est l'espérance mathématique.

L'écart – type représente la distance moyenne qui séparent toutes les valeurs d'une variable aléatoire à l'espérance mathématique.

On note : Variance : **V(X)**
Ecart – type : **σ(X)**

On a : $\mathbf{V(X) = E[X - E(X)]^2}$
$$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E(X - E(X))^2}}$$

3.2.1. Variance et écart – type d'une variable aléatoire discrète :

La variance est déterminée par le calcul de l'espérance mathématique (moyenne arithmétique) des carrés des écarts (distances) des valeurs de la variable aléatoire par rapport à son espérance mathématique.

Dans le cas discret on a :

$V(X) = E[X - E(X)]^2$ (Formule de définition)

$= \sum [[xi - E(X)]^2 . P(X = xi)$

On peut développer cette formule pour la simplifier :

$V(X) = E[(X - E(X)]^2$

$= E[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2]$

$= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Exemple:

X : « Nombre de Piles obtenues ».

X^2	0	1	4	9	$\sum P(X=xi)$
Pi	1/8	3/8	3/8	1/8	1

$E(X^2) = \sum xi^2 . P(X = xi)$

$= 0 . 1/8 + 1 . 3/8 + 4 . 3/8 + 9 . 1/8 = 24/8$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$= 24/8 - (12/8)^2 = 24/8 - 18/8 = 6/8$

L'écart – type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{\frac{6}{8}} = 0,87$

3.2.2. Variance et écart – type d'une variable aléatoire continue :

Dans le cas d'une variable aléatoire continue on a :

$$\mathbf{V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(x)\right)^2 . f(x)dx}$$

On peut simplifier la formule.

$$\mathbf{V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 . f(x)dx - E(X)^2}$$

Exemple :

La fonction f(x) définie par :

$f(x) = \frac{1}{2} . x$ si $0 \leq x \leq 2$

$f(x) = 0$ si $x < 0$ ou $x > 2$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 . f(x)dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2.f(x)dx + \int_{0}^{2} x^2.f(x)dx + \int_{2}^{+\infty} x^2.f(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} x^2.0\,dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{2}x^3dx + \int_{2}^{+\infty} x^2.0\,dx$$
$$= \int_{0}^{2} \frac{1}{2}x^3dx$$
$$= [\frac{1}{8}.x^4]_0^2 = F(2) - F(0) = \frac{16}{8} - 0 = 2$$
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - \frac{8}{6} = \frac{2}{3}$$

L'écart – type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,82$

3.2.3. Les propriétés de la variance et de l'écart – type :

La variance n'est pas un opérateur linéaire. Elle introduit des changements sur les relations mathématiques entre les variables aléatoires. Cela signifie que les relations entre les variables aléatoires ne sont pas les mêmes relations qui lient leurs variances.

Soient X et Y deux variables aléatoires dont les variances sont connues V(X) et V(Y).

On peut calculer les variances suivantes :

- **V(a) = 0.** (La variance d'une constante est nulle).
- **$V(aX + b) = a^2 V(X)$**

  On a : $V(aX + b) = E[((aX+b) - E(aX+b))^2] = E[aX + b - aE(X) - b)^2]$
  $= E[(aX - aE(X))^2] = E[a^2 (X - E(X))^2]$
  $= a^2 E(X - E(X))^2$
  $= a^2 V(X)$
- **V(X + Y) = V(X) + V(Y).** Si X et Y sont indépendantes.

  On a : $V(X + Y) = E[(X + Y) - E(X + Y)]^2$
  $= E[X + Y - E(X) - E(Y)]^2$
  $= E[(X - E(X)) + (Y - E(Y))]^2$
  $= E[(X - E(X))^2 + 2(X - E(X)).(Y - E(Y)) + (Y - E(Y))^2]$
  $= E(X- E(X))^2 + 2E[(X - E(X)).(Y - E(Y))] + E(Y-E(Y))^2$
  $= E(X- E(X))^2 + E(Y- E(Y))^2 + 2E[(X- E(X)).(Y- E(Y))]$
  $= V(X) + V(Y) + 2Cov(XY)$

  Avec $Cov(XY) = 2E[(X- E(X)).(Y- E(Y))]$

  Si X et Y sont indépendantes, la covariance est nulle : Cov(XY) = 0.

  Donc on aura : V(X + Y) = V(X) + V(Y)
- **V(X – Y) = V(X) + V(Y).** Si X et Y sont indépendantes.

  Même démonstration que V(X+Y) en posant V(X – Y) = V(X + (– Y)).
- Si X1, X2, …..Xn, n variables aléatoires indépendantes de même variance σ^2, alors :

$$V(\overline{X}) = V(\frac{X1 + X2 + \cdots \ldots\ldots + Xn)}{n}$$
$$= V[\frac{1}{n}(X1 + X2 + \cdots \ldots . + Xn)]$$
$$= \frac{1}{n^2} V(X1 + X2 + \ldots\ldots\ldots + Xn)$$
$$= \frac{1}{n^2} [V(X1) + V(X2) + \ldots\ldots\ldots + V(Xn)]$$
$$= \frac{1}{n^2} [\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots\ldots\ldots + \sigma^2]$$
$$= \frac{1}{n^2} .n. \sigma^2$$
$$\mathbf{V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}}$$

3.3. Moments d'une variable aléatoire :

3.3.1. Moment simple d'une variable aléatoire :

On appelle moment d'ordre k de la variable aléatoire X, l'espérance mathématique de X^k

On note moment simple d'ordre K de la variable X : $\mathbf{m_k}$

On a: $\mathbf{m_k = E(X^k)}$

Pour deux variables X et Y, on peut écrire le moment d'ordre (r , s) :

$$\mathbf{m_{rs} = E(X^r Y^s)}$$

On peut écrire la variance en termes de moments :

$$\mathbf{V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = m_2 - m_1^2}$$

3.3.2. Moment centré d'une variable aléatoire:

On appelle moment centré d'ordre k de la variable aléatoire X l'espérance mathématique des écarts des valeurs de X par rapport à l'espérance mathématique à la puissance K.

On moment centré d'une variable aléatoire : $\mathbf{M_k (X)}$

On a :

$$\mathbf{M_k (X) = E((X - E(X))^k)}$$

La nouvelle variable (X – E(X)) est dite une **variable centrée** quand on soustrait l'espérance mathématique de toutes les valeurs de X.

Dans ce cas, la variance est le moment centré d'ordre 2.