

Examen Final de Mathématiques 3 (Algèbre Linéaire I)
Université Paris 2, Panthéon-Assas - Licence 2ème année, Économie
15 janvier 2020
Enseignant : Nikos Pnevmatikos

Durée : 1h30 (sans documents, sans calculatrice)
Toutes vos réponses doivent être rigoureuses et bien argumentées

Partie 1 (10pts). Espace vectoriel et somme directe.

A : (i). Décrire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$; puis de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Dans $\mathbb{R}^3$ donner un exemple de deux sous-espaces dont l'union n'est pas un sous-espace vectoriel. Quel est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient l'union de deux sous-espaces vectoriels donnés?

(ii). L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est-elle un sous-espace vectoriel ? Donner un exemple.

Ensuite, on considère une famille de vecteurs $\mathcal{A} = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$ de dimension n , i.e., $\dim(\mathcal{V}) = n$.

1. Donner la définition de $\text{Vect}(\mathcal{A})$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$ engendré par la famille de vecteurs $\mathcal{A}$.
2. Sous quelle condition sur la famille de vecteurs $\mathcal{A}$ on a : $\text{Vect}(\mathcal{A}) = \mathcal{V}$?

B. Soient les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, -3, -5), \quad v_2 = (3, 4, -2), \quad v_3 = (1, 10, 8)$$

1. Ces vecteurs forment-ils une famille libre ?
2. Quelle est la dimension de $\text{Vect}(\{v_1, v_2, v_3\})$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par v_1, v_2 et v_3 ?
3. On considère l'ensemble $W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$. Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Montrer que $W = \text{Vect}(\{v_1, v_2, v_3\})$.
5. Donner deux bases différentes de W .
6. Donner un supplémentaire de W dans $\mathbb{R}^3$.

Partie 2 (10pts). Application linéaire et matrice associée.

A : (i). On considère $\mathcal{U} := (U, +_U, \cdot_U)$ et $\mathcal{V} := (V, +_V, \cdot_V)$ deux espaces vectoriels et soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ une application linéaire.

1. Démontrer que $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$.
2. On suppose que $\mathcal{U}$ est de dimension finie, i.e., $\dim(\mathcal{U}) = n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Si f est un isomorphisme que dire alors de la dimension de $\mathcal{V}$?
 - Si f est un monomorphisme que dire alors de la dimension de $\mathcal{V}$?
 - Si f est un épimorphisme que dire alors de la dimension de $\mathcal{V}$?
3. Quel est le lien entre produit de matrices et composition d'applications linéaires ?

(ii). On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $f(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Montrer que f est ni injective ni surjective.
3. Déterminer le noyau $\text{Ker}(f)$ et l'image $\text{Im}(f)$.

B : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canonique. On considère la famille $\mathcal{A} := \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ définie par :

$$\vec{v}_1 := (1, 0, -1), \quad \vec{v}_2 := (0, 1, 2), \quad \vec{v}_3 := (2, 1, 1)$$

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui envoie :

$$\vec{e}_1 \mapsto \vec{v}_1, \quad \vec{e}_2 \mapsto \vec{v}_2, \quad \vec{e}_3 \mapsto \vec{v}_3$$

2. Montrer que cette application linéaire est de la forme :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ X \mapsto AX \end{cases}$$

où $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice 3×3 que l'on explicitera.

3. L'application f est-elle un isomorphisme ? Si oui, donner l'expression de l'application réciproque et de sa matrice associée.