

Feuille d'exercices4^{ème} Math

(Arithmétique)

Mr: Bouhouch Ameer

Exercice n°1:Soit, dans, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E): $35x - 96y = 1$.

- 1) Vérifier que le couple (11,4) est une solution particulière de (E).
- 2) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) .
- 3) Soit, dans $\mathbb{IN}$, l'équation (F): $x^{35} \equiv 2[97]$ et soit x une solution de (F).
 - a) Montrer que 97 est premier et que x et 97 sont premiers entre eux.
 - b) Montrer que $x^{96} \equiv 1[97]$.
 - c) Dédire que $x \equiv 2^{11}[97]$.
 - d) Montrer que si $x \equiv 2^{11}[97]$ alors x est une solution de (F).
 - e) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (F) sont de la forme $11+97k$ où $k \in \mathbb{IN}$.

Exercice n°2:(Capes)

On considère les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le chiffre 1.

Pour tout entier naturel $p \geq 2$. On pose $A_p = 11 \dots 1$ (le chiffre 1 apparaît p fois).

- 1) a) On suppose que p est pair. Montrer que A_p est divisible par A_2 .
 b) On suppose que k est un diviseur de p . Montrer que A_p est divisible par A_k .
- 2) Soient p et q deux entiers naturels premiers entre eux. On se propose de déterminer $A_p \wedge A_q$.
 On considère l'équation (E): $px - qy = 1$.
 a) Justifier l'existence des solutions de l'équation (E).
 b) Vérifier que pour tout couple (x,y) d'entiers naturels solutions de l'équation (E)
 on a : $(10^{px} - 1) - 10(10^{qy} - 1) = 9$
 c) Montrer qu'il existe deux entiers X et Y tels que $A_p X - A_q Y = 1$.
 d) Dédire des questions précédentes $A_p \wedge A_q$.

Exercice n°3:

- 1) Vérifier que: $17 \times 19 \times 23 = 7429$.
- 2) Un commerçant effectue trois remises successives sur un article d'un prix de 300^D et le vend finalement $222^D,870$.
 Quels sont les pourcentages des trois remises appliquées, sachant qu'il s'agit de valeurs entières?

Exercice n°4:Soit $(m,n) \in \mathbb{IN}^{*2}$ tel que $m \wedge n = 1$.

- 1) Montrer que $2m^2 + n^2$ n'est pas divisible par 5.
- 2) Dédire que $(2m^2 + n^2) \wedge 5 = 1$.
- 3) Soit l'équation (E): $2x^3 + x + 1 = 0$; $x \in \mathbb{IR}$.
 a) Montrer que l'équation (E) admet une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$.
 On pose $\alpha = \frac{m}{n}$ où $(m,n) \in \mathbb{IN}^{*2}$ tel que $m \wedge n = 1$.
 b) Vérifier que $(2m^2 + n^2)m = 5n^3$.
 c) Montrer que $m = 5$ et déduire que α est irrationnel.