

Secteur : **Gestion-Commerce**

Manuel de cours stagiaire

M107: Techniques Quantitatives de Gestion

1^{ère} Année

Filière :

Assistant
Administratif
(Tronc commun)



REMERCIEMENTS

La DRIF / Le CDC Gestion Commerce remercie toutes les personnes qui ont participé à l'élaboration de ce guide de soutien.

Pour la supervision

Nom et prénom	Qualité	Direction
AGLAGALE MOHAMMED	Directeur CDC GC	DRIF

Pour la conception :

Nom et Prénom	QUALITE	Affectation
AMIZ AZIZA	Formateur Animateur	CDC GC
DOURID SOUAD	Formateur	ISTA 1 Settat
EL ATITER HANANE	Formateur	CMC Laayoune

Pour la validation :

Nom et Prénom	Qualité	Affectation
AMIZ AZIZA	Formateur Animateur	DRIF

N.B :

Les utilisateurs de ce document sont invités à communiquer à la DRIF / CDC GESTION COMMERCE toutes les remarques et suggestions afin de les prendre en considération pour l'enrichissement et l'amélioration de ce manuel.

OBJECTIF OPERATIONNEL

COMPORTEMENT ATTENDU

Pour démontrer sa compétence, le stagiaire doit :

- **Appliquer les notions de l'arithmétique commerciale**
- **Appliquer les méthodes statistiques**

Selon les conditions, les critères et les précisions qui suivent.

CONDITIONS D'EVALUATION

- A partir des études de cas, mise en situation, consignes du formateur, toute documentation nécessaire
- A l'aide de : calculatrice, tableur et logiciel de statistiques,

CRITERES GENERAUX

- Respect de la démarche de calcul
- Respect des principes de gestion de temps
- Respect des pratiques courantes et des règles établies par l'entreprise
- Exactitude des calculs
- Vérification appropriée du travail

PRECISIONS SUR LE COMPORTEMENT ATTENDU	CRITERES PARTICULIERS DE PERFORMANCE
Appliquer les notions de l'arithmétique commerciale	• Les opérations sur fractions • La règle de trois • Le partage proportionnel • Les pourcentages • Le calcul des prix • Le coefficient multiplicateur
Comprendre les variables statistiques	• Qualification d'une variable qualitative • Qualification d'une variable quantitative discrète • Qualification d'une variable quantitative continue
Réaliser des représentations graphiques	• Représentation correcte des variables quantitatives discrètes • Représentation correcte des variables quantitatives continues •
	•
Calculer les Caractéristiques des distributions	• Calcul et interprétation juste des paramètres de tendance centrale • Mode • Médiane • quartiles • Moyennes • Calcul et interprétation correcte des paramètres de dispersion • Étendue • Écart absolu moyen et écart inter quantile • Variance, écart-type et coefficient de variation

PREMIERE PARTIE



OBJECTIF :

Appliquer les notions de l'arithmétique commerciale

- Les opérations sur fractions
- La règle de trois
- Le partage proportionnel
- Les pourcentages
- Le calcul des prix
- Le coefficient multiplicateur

Exemple illustratif :



Questions

- 1- Que représente l'image ?
- 2- Qu'est ce qu'un prix ?
- 3- Comment peut-on calculer ces montants ?

CHAPITRE I : LES NOTIONS DE L'ARITHMÉTIQUE

COMMERCIALE

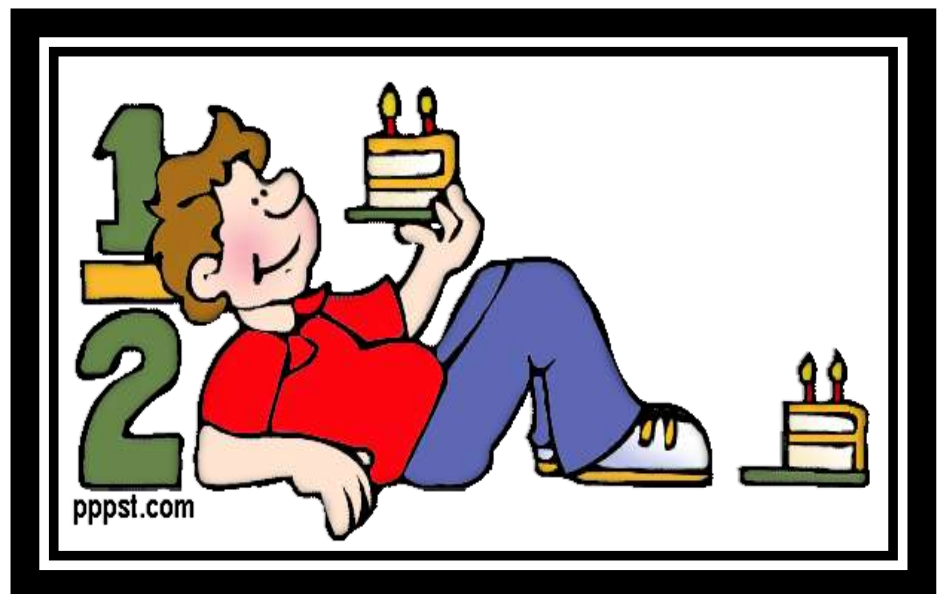
Exemple D'introduction : <https://www.youtube.com/watch?v=ZAytqZmzbnw>

1. Les fractions

Définition :

Une fraction est une portion d'un tout ; c'est le nombre de parties égales dans une unité.

En d'autre terme, une fraction est un symbole mathématique qui exprime une ou plusieurs parties d'une unité divisée en parties égales.



Exemple : $\frac{4}{5}$

Termes d'une fraction : $(\frac{4}{5})$

4 : Numérateur

5 : Dénominateur

Simplification d'une fraction :

Pour réduire (simplifier) une fraction, il faut diviser ces 2 termes par un même nombre.

$$24/20 = (24 : 4) / (20 : 4) = 6 / 5 \text{ (On a divisé les deux termes par 4.)}$$

Particularité des fractions :

Souvent une fraction exprime une valeur inférieur

(<) à 1. Exemples : $\frac{1}{2}$ de litre d'eau

Mais aussi, elle peut exprimer une valeur supérieure (>) à 1.

Exemple

“Une baguette et demi” = $\frac{3}{2}$ baguettes

Addition de deux fractions

Premier cas - **Fractions ayant le même dénominateur.**

Exemple :

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$$

Règle :

Pour additionner deux fractions ayant le même dénominateur, il suffit d'additionner les numérateurs entre eux et de conserver le dénominateur.

Deuxième cas - **Fractions ayant des dénominateurs différents.**

Exemple : $7/2 + 4/3$

On a deux dénominateurs : 2 et 3 donc le dénominateur commun et $3 \times 2 = 6$

Ainsi

$7/2$ on multiplie le numérateur et le dénominateur par 3 pour avoir le dénominateur commun 6 : $7 \times 3 / 2 \times 3$

$4/3$ on multiplie le numérateur et le dénominateur par 2 pour avoir le dénominateur commun 6 : $4 \times 2 / 3 \times 2$

Donc : $7/2 + 4/3 = 21/6 + 8/6 = (21+8)/6 = 29/6$

Règle :

Pour additionner deux fractions n'ayant le même dénominateur, il suffit de multiplier la 1ère fraction avec le dénominateur de la 2ème fraction et multiplier la 2ème fraction par le dénominateur de la 1ère fraction pour avoir un dénominateur commun.

Soustraction de fractions

Premier cas - **Fractions ayant le même dénominateur.**

Exemple :

$$\frac{7}{9} - \frac{3}{9} = \frac{7-3}{9} = \frac{4}{9}$$

Règle

Pour soustraire deux fractions ayant le même dénominateur, il suffit de faire la différence des numérateurs et de conserver le dénominateur.

Deuxième cas - Fractions ayant des dénominateurs différents.

Exemple :

$$\frac{7}{12} - \frac{3}{8} = \frac{(7*8)-(3*12)}{12*8}$$

Il faut réduire les fractions au même dénominateur

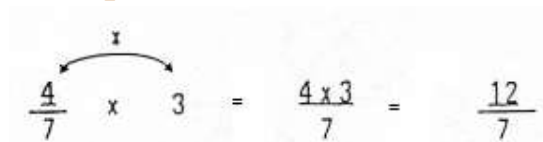
Règle :

Pour soustraire deux fractions n'ayant le même dénominateur, il suffit de multiplier la 1^{ère} fraction avec le dénominateur de la 2^e fraction et multiplier la 2^e fraction par le dénominateur de la 1^{ère} fraction pour avoir un dénominateur commun et effectuer la soustraction.

Multiplication

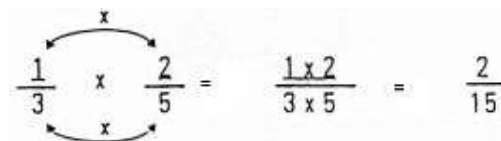
Premier cas - Une fraction multipliée par un nombre.

Exemple :


$$\frac{4}{7} \times 3 = \frac{4 \times 3}{7} = \frac{12}{7}$$

Règle :

Pour multiplier une fraction par un nombre entier, il suffit de multiplier le numérateur par ce nombre et conserver le dénominateur.


$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1 \times 2}{3 \times 5} = \frac{2}{15}$$

Deuxième cas - Une fraction multipliée par une autre fraction.

Règle

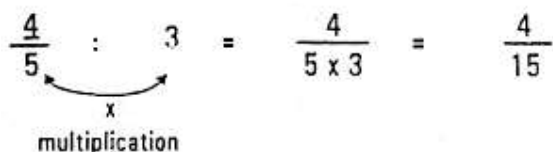
Pour multiplier deux fractions entre elles, il faut multiplier les numérateurs et les dénominateurs entre eux.

Division

Premier cas : Une fraction divisée par un nombre entier.

Exemple :

$$\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{5 \times 3} = \frac{4}{15}$$

A curved arrow labeled 'x' points from the denominator 5 to the integer 3, indicating multiplication. Below the arrow is the word 'multiplication'.

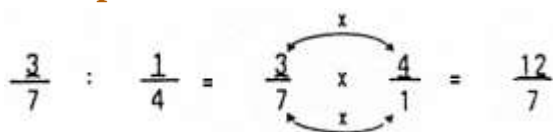
Règle :

Pour diviser une fraction par un nombre entier, il suffit de multiplier le dénominateur par ce nombre.

Deuxième cas : Une fraction multipliée par une autre fraction.

Exemple :

$$\frac{3}{7} : \frac{1}{4} = \frac{3}{7} \times \frac{4}{1} = \frac{12}{7}$$

A diagram showing the multiplication of two fractions. A curved arrow labeled 'x' points from the denominator 7 of the first fraction to the numerator 4 of the second fraction. Another curved arrow labeled 'x' points from the numerator 3 of the first fraction to the denominator 1 of the second fraction. Below the second fraction is the word 'inverse'.

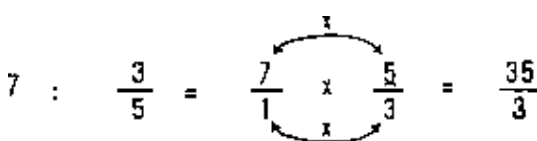
Règle :

Pour diviser une fraction par une autre, il suffit de multiplier la première par l'inverse de la seconde.

Troisième cas : Un nombre divisé par une autre fraction.

Exemple :

$$7 : \frac{3}{5} = \frac{7}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{35}{3}$$

A diagram showing the multiplication of an integer and a fraction. A curved arrow labeled 'x' points from the integer 7 to the numerator 5 of the second fraction. Another curved arrow labeled 'x' points from the denominator 3 of the second fraction to the integer 1 (implied) of the first fraction. Below the second fraction is the word 'inverse'.

Règle :

Pour diviser un nombre par une fraction, on multiplie ce nombre par l'inverse de la fraction

Exercice :

Effectuer les différentes opérations dans les fractions suivantes:

$$\frac{5}{3} : \frac{1}{4} =$$

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$\frac{12}{4} : \frac{12}{6} =$$

$$\frac{2}{17} \cdot \frac{3}{34} =$$

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6} : \frac{1}{3} =$$

$$\frac{4}{5} \times \frac{7}{8} =$$

$$\frac{16}{25} \times \frac{1}{2} =$$

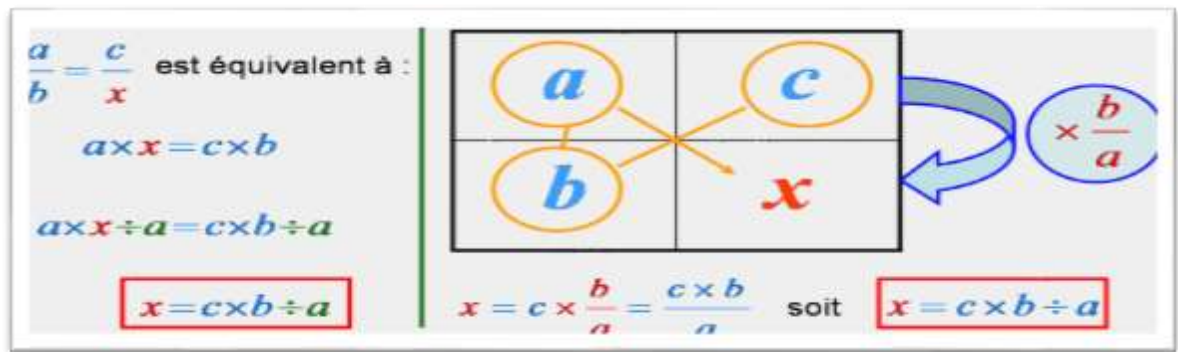
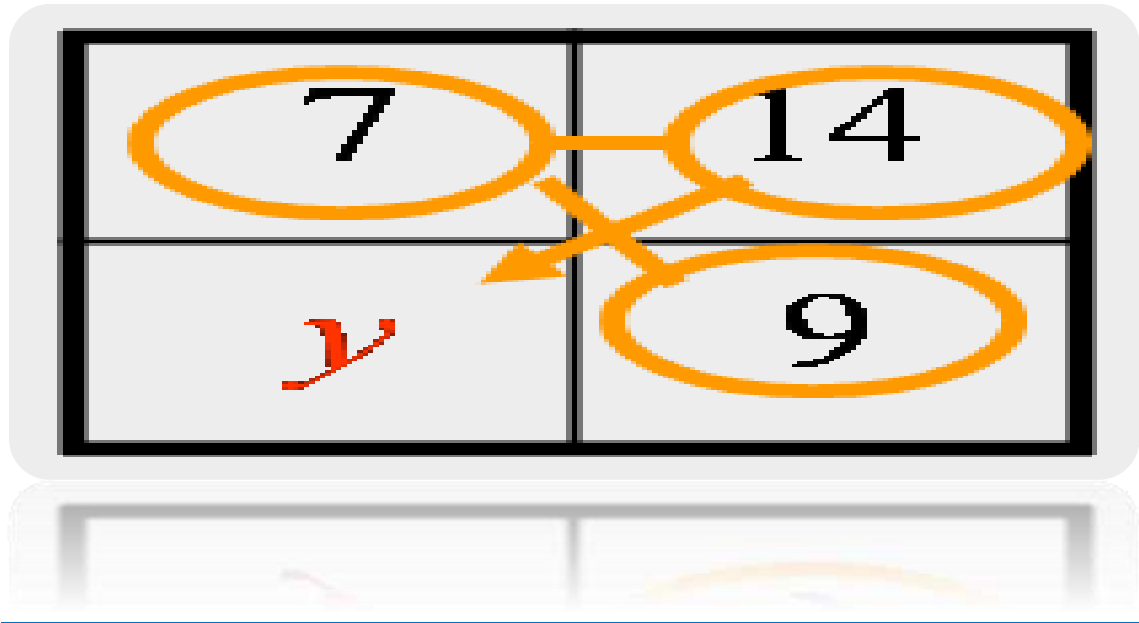
$$\frac{14}{3} : \frac{2}{3} =$$

$$\frac{1}{12} : \frac{1}{6} =$$

$$\left(\frac{1}{8} : \frac{3}{4} \right) \times \frac{2}{3} =$$

2-Règles de trois

a) Règle de trois simple et directe



(S'applique à des grandeurs directement proportionnelles),

En 8 heures de travail un tourneur a réalisé 10 pièces.

Combien des pièces réalisera-t-il après 40 heures de travail ? Essayons de résoudre ce problème par 2 méthodes différentes.

Méthode des proportions.

Le nombre des pièces est directement proportionnel au temps de travail. Nous pouvons écrire la proportion suivante :

$$\frac{10}{8} = \frac{a}{40}$$

‘a’ étant le nombre réalisé après 40 heures de travail, le produit des extrêmes étant égal au produit des moyens, nous obtenons :

$$8 \times a = 400 \quad \frac{400}{8} = 50$$
$$a = 50$$

Méthode du coefficient constant de proportionnalité

Nous pouvons remarquer que le coefficient de proportionnalité est de

$$\frac{10}{8} = 1.25$$

Ce coefficient est égal au nombre des pièces réalisées dans 1 heure. Pour 40 heures de travail, l’ouvrier réalisera :

$$1,25 \times 40 = 50 \text{ pièces}$$

b) Règle de trois simple et inverse

(S’applique à des grandeurs inversement proportionnelles)

En employant 10 ouvriers, un entrepreneur peut faire construire un ouvrage en 9 jours. Combien mettrait-il de jours s’il occupait 15 ouvriers ?

Essayons de résoudre ce problème par les 2 méthodes précédentes.

Méthode des proportions

Nous constatons que les nombres de jours sont inversement proportionnels aux nombres d’ouvriers

$$a = \frac{90}{15}$$

Méthode du coefficient constant de proportionnalité

Le produit du nombre d'ouvriers par le nombre de jours correspondants est constant.

Il est égal à $10 \times 9 = 90$

C'est le nombre de jours nécessaires à un ouvrier pour effectuer seul le travail. On en déduit le temps mis par 15 ouvriers.

$$90 : 15 = 6$$

Evaluation

Énoncé

:

Une locomotive consomme 3 280 Kg de charbon en 12 jours, si elle roule 8 heures par jour.

Quelle sera la consommation en charbon si elle roule 260 jours à raison de 5 heures par jour ?

Corrigé

12 jours	8h/j	3 280 kg
1 jour	8h/j	$\frac{3\,280}{12}$
1 jour	1h/j	$\frac{3\,280}{12 \times 8}$
260 jours	1h/j	$\frac{3\,280 \times 260}{12 \times 8}$
260 jours	5h/j	$\frac{3\,280 \times 260 \times 5}{12 \times 8} = \mathbf{44\,416,67\,kg}$

3-PARTAGE PROPORTIONNEL

Partager une somme proportionnellement aux nombres a, b, c c'est effectuer un partage proportionnel à a, b, c.

Selon que a, b, c appartiennent à une seule grandeur ou à plusieurs grandeurs , le partage est dit simple ou composé.



a)Partages directement proportionnels

Principe :

Les parts forment avec les nombres donnés une suite de rapports égaux.

Règle :

Pour partager une somme en parties directement proportionnelles à des nombres donnés :

⇒ **On divise cette somme par le total des nombres donnés et on multiplie le quotient successivement par chacun d'eux.**

Si le partage a lieu proportionnellement à des fractions, on réduit celles-ci au même dénominateur et on effectue le partage proportionnellement aux numérateurs.

Exemple :

Partager une prime de fin d'année de 22 478 DH proportionnellement aux années de service de 3 employés : 6 ans, 12 ans et 14 ans

$$-6+12+14=32$$

$$\Rightarrow \text{Part du premier : } \frac{6}{32} \times 22478 = 4214.63$$

$$\Rightarrow \text{Part du second : } \frac{12}{32} \times 22478 = 8429.25$$

$$\Rightarrow \text{Part du troisième : } \frac{14}{32} \times 22478 = 9834.12$$

b)Partages Inversement Proportionnels

Principe :

Les parts forment avec les inverses des nombres donnés une suite de rapports égaux.

Règle :

Pour partager une somme en parties inversement proportionnelles à des nombre donnés :

⇒ ***On la partage en parties directement proportionnelles aux inverses de ces nombres .***

Exemple :

Une gratification de 14 000 DH est à partager entre les trois membres d'une équipe en parties inversement proportionnelles au nombre d'heures de travail nécessaires pour l'exécution d'une tâche donnée, ils ont effectué chacun et qui sont respectivement : 63 H , 72 H et 80 H.

Les parts sont directement proportionnelles à :

$$\frac{1}{63}, \frac{1}{72}, \frac{1}{80}$$

En réduisant au même dénominateur on aura :

$$63 \cdot 72 \cdot 80 = 5040$$

La part du premier : La part du deuxième : La part du troisième :

$$\frac{80}{5040}, \frac{70}{5040}, \frac{63}{5040}$$

EXERCICES

EXERCICE 1

le rapport de deux nombres est $\frac{23}{32}$ et la différence entre les deux est 27 ; calculer ces deux nombres.

EXERCICE 2

Calculer deux nombres x et y sachant que leur somme est 168 et que leur rapport est $\frac{5}{7}$.

SOLUTION 1

$$X / Y = 23 / 32$$

$$X = 23 \times 27 / 9 = 69$$

$$Y - X = 27$$

$$Y = 32 \times 27 / 9 = 96$$

SOLUTION 2

Nous savons que : $x + y = 168$

$$x / y = 5/7$$

1^{ière} solution :

Si $a/b = c/d$ alors $(a + b) / b = (c + d) / d$
Et en partant de $x / y = 5 / 7$

Nous pouvons écrire :

$$(x + y) / y = (5 + 7) / 7 = 12 / 7$$

Remplaçons $(x + y)$ par sa valeur

$$168 / y = 12 / 7 \text{ d'où } 12 y = 1176$$

$$y = 98$$

$$x = 168 - 98 = 70$$

2^{ième} solution:

$$\text{si } a/b = c/d$$

$$\text{alors } a/b = c/d = a+c/b+d$$

$$\text{et en partant de } x/y = 5/7$$

Nous pouvons écrire :

$$x/5 = y/7 = x+y/5+7$$

$$= 168 / 12 = 14$$

$$\text{d'où : } y = 98$$

$$x = 7$$

4-Les pourcentages, le calcul des prix , le coefficient multiplicateur



Définitions

On appelle pourcentage (ou tant pour cent) le rapport constant de deux grandeurs proportionnelles quand la mesure de la seconde est 100.

C'est donc un rapport dont le dénominateur est 100.

Le coefficient multiplicateur est le nombre qui permet de passer de la quantité connue à la quantité inconnue par une seule multiplication.

Du point de vue mathématique, on a deux cas distincts :

- Soit le pourcentage s'applique à une quantité connue, on l'appelle alors *pourcentage direct* ;
- Soit le pourcentage s'applique à une quantité inconnue, on l'appelle, dans ce cas, *pourcentage indirect*.

Pourcentage direct

Exemple :

Un commerçant achète un article au prix de 9 000 DH. Il désire réaliser un bénéfice de 20% sur le prix d'achat. Quel sera alors son bénéfice ?

$$\text{Bénéfice} = \frac{9000 \times 20}{100}$$

=

Cette expression peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\text{Bénéfice} = 9000 \times \frac{20}{100} \rightarrow \text{Bénéfice} = 1800 \text{ DH}$$

Plus généralement, une quantité représentée par un pourcentage de x % applicable à une quantité connue P, se calcule comme suit :

$$P = \frac{x}{100}$$

Pourcentage indirect

Exemple

Un commerçant achète une marchandise à 24 000 DH et désire réaliser un bénéfice de 25 % sur le prix de vente. Quel sera, dans ce cas, son bénéfice ?

Le bénéfice (B) = 25 chaque fois que le PV = 100 et par voie de conséquence, le prix d'achat (PA) sera égal à 100 – 25 = 75

$$B = \frac{25}{75} \times pa$$

$$B = 25 / 75 \times 24\,000 \longrightarrow \text{bénéfice} = 8000$$

Généralisation :

$$\begin{array}{rcl} PA & 100 - x & \\ +B & x & \\ \hline PV & 100 & \end{array}$$

d'où

$$B = \frac{x}{100 - x} \times PA$$

Application des pourcentages aux réductions sur le prix

En général, le commerçant accorde à ses clients une réduction de a % calculée sur le prix de vente public appelé aussi :

- Prix de vente -catalogue (PVC)
- Prix de vente brut (PVB)
- Prix de vente marqué (PVM)

Calcul du PVC en fonction du PV

Le point de départ est le
PVC

Le point d'arrivée est le PV

Exemple : un commerçant qui accorde deux remises 10 % et 8%.

On commence par poser l'élément à calculer (point de départ) et on termine par l'élément connu (point d'arrivée)

$$PVC = \frac{100}{100 - a} \times \frac{100}{100 - b} \times PV$$
$$PVC = \frac{100}{90} \times \frac{100}{92} \times PV$$

Calcul du PV en fonction du PVC

Point de départ : PV → à
calculer

Point d'arrivée : PVC → connu

$$PV = \frac{100 - b}{100} \times \frac{100 - a}{100} \times PVC \text{ qu'on peut écrire sous la forme suivante :}$$

$$PV = \frac{100 - a}{100} \times \frac{100 - b}{100} \times PVC$$

Dans l'exemple chiffré, on a :

$$PV = \frac{90}{100} \times \frac{92}{100} \times PVC$$

Exemples :

- Passer du prix d'achat (PA) au prix de vente net (PV).
- Passer du coût de revient (CR) au prix de vente à la clientèle (PVC)

Application des pourcentages aux réductions sur le poids

Le poids total d'une marchandise est nommé poids brut, on distingue plusieurs réductions sur le poids :

- La tare : c'est une réduction sur le poids de l'emballage.
- La surtare : c'est une réduction pour emballage supplémentaire.
- Le don : c'est une réduction accordée pour altération naturelle de la marchandise.
- La réfaction : réduction accordée pour avaries dans la livraison.

Les réductions sur le poids se calculent également en cascade.

Exemple :

Le poids brut d'une marchandise est de 5 200 kg, la tare est de 2%, le don 3% et la réfaction 1.5% ; calculer le poids net facturé ?

Poids brut	5 200 kg
Tare : 2% de 5200	104 kg
Ne t1	5096 kg
Don : 3% de 5 096	152.88 kg
Net 2	4 943.12 kg
Réfaction : 1.5% de 4 943.12	74.15 kg
Poids net facturé	4 868.97 kg

Application des pourcentages en matière de TVA

Calcul de la TVA

La TVA se calcule sur le prix de vente hors taxe (HT).

Elle s'ajoute à ce prix pour obtenir le prix de vente toutes taxes comprises (TTC). Soit :

- t : le taux de la TVA.
- PHT : le prix hors taxe.
- $PTTC$: le prix toutes taxes comprises.
- TVA : le montant de la TVA.

$$TVA = \frac{PHT \times t}{100}$$

Calcul du PTTC et du PHT

$$PTTC = PHT + TVA$$

$$PTTC = PHT + \frac{PHT \times t}{100}$$

$$PTTC = PHT \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$$

$$PHT = PTTC \times \frac{1}{1 + \frac{t}{100}}$$

Exemple :

Un commerçant vend des marchandises toutes taxes comprises à 19 560 DH.
Déterminer le prix de vente hors taxe et la montant de la TVA ?

1. Calcul du PHT

$$PHT = 19\,560 \times \frac{1}{1 + \frac{20}{100}} = 16\,300 \text{ DH}$$

2. Calcul de la TVA

$$TVA = PTTC - PHT$$

$$TVA = 19\,560 - 16\,300 = 3\,260 \text{ DH.}$$

Exercices

Exercice 1

Calculer 3% sur 9 620 DH – 7,2 % sur 2870 DH – 12,2 % sur 570 DH - 4‰ sur 6 800 DH.

Solution 1

Calcul de pourcentage :

$$3 \% \text{ sur } 9\,620 = \frac{9\,620 \times 3}{100} = 288,60$$

$$7,2 \% \text{ sur } 2\,870 = \frac{2\,870 \times 7,2}{100} = 206,64$$

$$12,2 \% \text{ sur } 870 = \frac{870 \times 12,2}{100} = 106,14$$

$$4 \text{ ‰ sur } 6\,800 = \frac{6\,800 \times 4}{1\,000} = 27,2$$

Exercice 2

Etablir le poids net à facturer sur une livraison de poids brut : 36 tonnes en tenant compte des bonifications suivantes :

Freinte 2 % ; Tare 1,5 ; Réfaction 6 %.

Solution 2

Calcul du poids net :

<i>Poids brut</i>	36
<i>Freinte 2 %</i>	<u>0,72</u>
	35,28
<i>Tare 1,5 %</i>	<u>0,5292</u>
	34,7508
<i>Réfaction 6%</i>	<u>2,085048</u>
<i>Poids net</i>	32,665752

$$\begin{aligned} 32,6665752 \text{ tonnes} &= 32\,665,752 \text{ kg} \\ &= 32\,665\,752 \text{ grammes} \end{aligned}$$

DEUXIEME PARTIE

Statistique descriptive



Objectif du chapitre I

1-Comprendre les variables statistiques

- Qualification d'une variable qualitative
- Qualification d'une variable quantitative discrète
- Qualification d'une variable quantitative continue

2-Réaliser des représentations graphiques

- Représentation correcte des variables quantitatives discrètes
- Représentation correcte des variables quantitatives continues

CHAPITRE I : LES VARIABES STATISTIQUES

1-Terminologie :

1. Statistique :

La statistique est une méthode scientifique dont l'objet est de recueillir, d'organiser, de résumer et d'analyser les données d'une enquête, d'une étude ou d'une expérience, aussi bien que de tirer les conclusions logiques et de prendre les décisions qui s'imposent à partir des analyses effectuées.

2. Population :

Ensemble d'individus définis par une propriété commune donnée.

Exp : si l'on veut étudier la durée de vie des ampoules électriques fabriquées par une compagnie, la population considérée est l'ensemble de toutes les ampoules fabriquées par cette compagnie.

3. Echantillon :

Sous-ensemble de la population.

Exp : pour établir la durée de vie des ampoules électriques produites par une machine, on peut prélever au hasard un certain nombre d'ampoules - un échantillon- parmi toutes les celles produites par cette machine.

4. Individu ou unité statistique :

Chaque élément de la population ou de l'échantillon.

Exp : dans l'exemple précédant, chaque ampoule constitue un individu ou une unité statistique.

5. La taille :

Représente le nombre d'individus d'un échantillon ou d'une population. Elle est symbolisée par « n » dans le cas d'un échantillon et par « N » dans le cas d'une population.

6. Le caractère :

C'est l'aspect particulier que l'on désire étudier.

Exp : concernant un groupe de personnes, on peut s'intéresser à leur âge, leur sexe leur taille...

7. Les modalités :

Les différentes manières d'être que peut présenter un caractère.

Exp 1 : le sexe est un caractère qui présente deux modalités : féminin ou masculin

Exp 2 : quant au nombre d'enfants par famille, les modalités de ce caractère peuvent être 0,1 2,3...,20.

8. Caractère qualitatif :

Ses modalités ne s'expriment pas par un nombre

Exp : la religion, le sexe, l'opinion...

9. Caractère quantitatif :

Ses modalités sont numériques.

Exp : l'âge, la taille, le poids...

10. Caractère quantitatif discret

L'ensemble des valeurs que peut prendre le caractère est fini ou dénombrable. Le plus souvent, ces valeurs sont entières.

Exp : le nombre d'enfants dans une famille, le nombre de téléviseurs par foyer et la pointure des souliers.

11. Caractère quantitatif continu :

Le caractère peut prendre théoriquement n'importe quelle valeur dans un intervalle donné de nombres réels.

Exp : la taille d'un individu, le poids...

12. Série statistique :

L'ensemble des différentes données associées à un certain nombre d'individus.

Exp : la série suivante résulte d'une courte enquête auprès de quelques personnes pour connaître leur âge :

18 21 19 19 17 22 27 18 18 17 20 20 23

2- Qualification d'une variable qualitative et variable quantitative

Pour une variable qualitative, les modalités ne sont pas mesurables.

Pour une variable quantitative, les modalités sont mesurables. Ce sont :

- des valeurs numériques ponctuelles lorsque la variable est **discrète**
- des intervalles lorsque la variable est **continue** ou lorsque la variable est discrète et qu'elle comporte beaucoup de modalités

3-Représentations graphiques :



Lorsqu'on observe un caractère sur des individus, on aboutit à un tableau de chiffres peu parlant. L'objectif est de donner une représentation graphique de ce tableau qui permettra d'un seul coup d'œil d'avoir une idée de la manière dont se répartissent les individus.

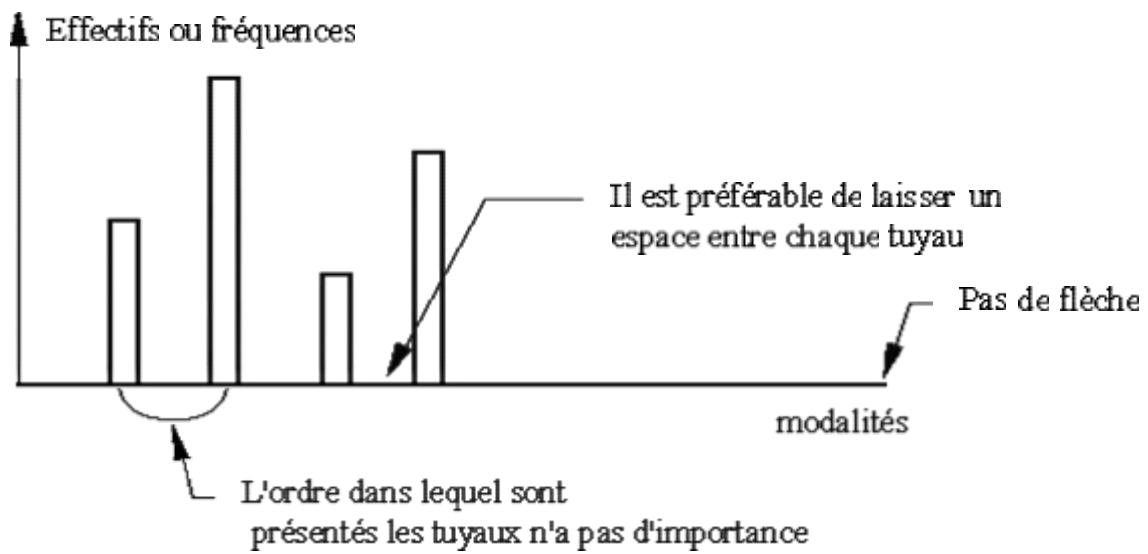
a- Variable qualitative :

A chaque modalité i est associé un effectif n_i .

La seule représentation qui nous intéresse est celle des effectifs n_i (ou des fréquences n_i/n). Suivant la variable observée, de nombreuses représentations plus ou moins informatives peuvent être utilisées. Cependant les 2 plus classiques sont:

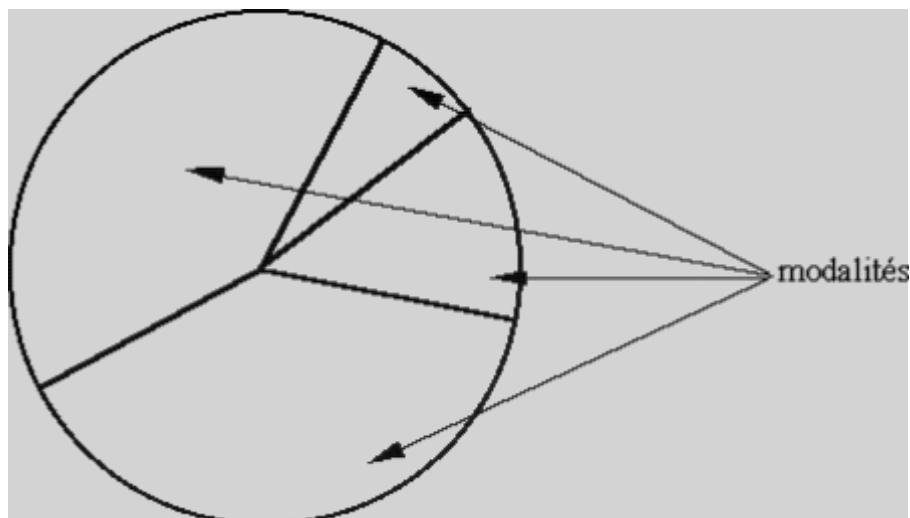
a-1 -Les tuyaux d'orgue (ou diagramme en barre ou diagramme à bandes)

- les modalités de la variable sont placées sur une droite horizontale (attention: ne pas orienter cette droite car les modalités ne sont pas mesurables et il n'y a donc pas de relation d'ordre entre elles).
- les effectifs (ou les fréquences) sont placés sur un axe vertical. La hauteur du tuyau est proportionnelle à l'effectif.



a-2 -les diagrammes à secteurs (ou camemberts)

- L'effectif total est représenté par un disque.
- Chaque modalité est représentée par un secteur circulaire dont la surface (pratiquement : l'angle au centre) est proportionnelle à l'effectif correspondant.



Application :

La répartition des candidats convoqués pour participer au Test d'Admissibilité à la Formation en Management (TAFEM 1998) pour l'accèsion à L'Ecole Nationale de Commerce et de Gestion d'Agadir , selon la série du baccalauréat se présente comme suit :

Série du Bac xi	Nombre de candidats ni
Sciences économiques	250
Sciences mathématiques	200
Sciences expérimentales	400
T.G.A	50
T.G.C	100
Total	1000

TAE: représentez cette distribution en Tuyaux d'orgues et Diagramme circulaire.

b- Variable quantitative :

Avant toute tentative de représentation, il y a lieu de distinguer entre variable discrète et variable classée (regroupements en classes).

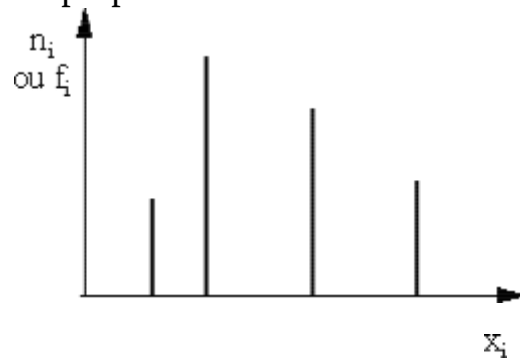
Deux types de graphiques sont intéressants de représenter :

- a) les diagrammes différentiels qui mettent en évidence les différences d'effectifs (ou de fréquences) entre les différentes modalités ou classes.
- b) les diagrammes cumulatifs qui permettent de répondre aux questions du style "combien d'individus ont pris une valeur inférieure (ou supérieure) à tant?".

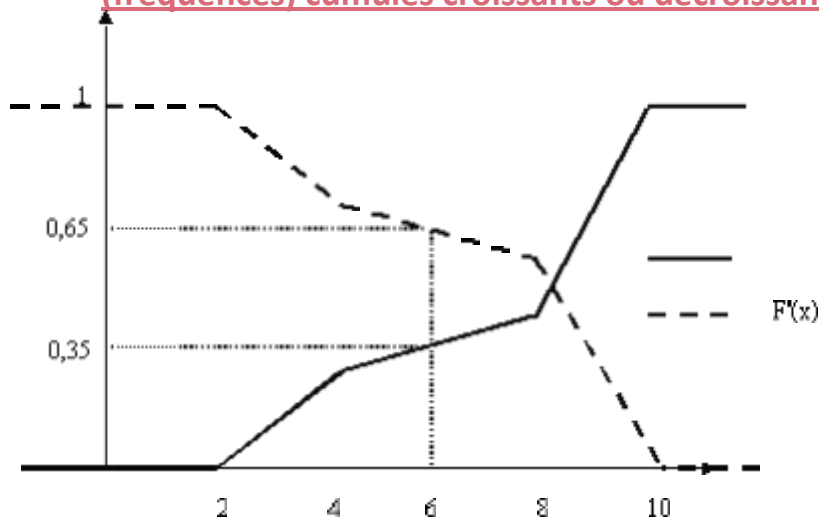
1) Variable discrète

a-1 Diagramme différentiel : le diagramme en bâtons

Les valeurs discrètes x_i prises par les variables sont placées sur l'axe des abscisses, et les effectifs (ou les fréquences) sur l'axe des ordonnées. La hauteur du bâton est proportionnelle à l'effectif.



a-2 Diagrammes cumulatifs : ils permettent de visualiser l'évolution des effectifs (fréquences) cumulés croissants ou décroissants.



Remarque: les deux courbes sont symétriques par rapport à un axe horizontal d'ordonnée $n/2$ pour les effectifs, $1/2$ pour les fréquences.

On utilise l'effectif (fréquence) cumulé croissant pour répondre aux questions du style :
Quel est le nombre (%) d'individus dont la valeur du caractère est inférieure ou égale à x ?

On utilise l'effectif (fréquence) cumulé décroissant pour répondre aux questions du style :

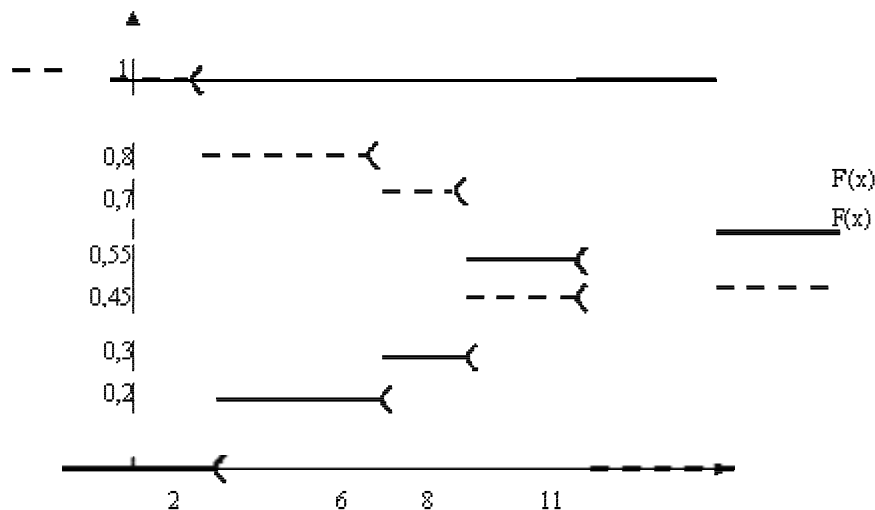
Quel est le nombre (%) d'individus dont la valeur du caractère est strictement supérieure à x ?

Se souvenir:

(au plus x) équivalent à $(\leq x)$ donc utiliser $N(x)$
ou $F(x)$

(plus que x) équivalent à $(> x)$ donc utiliser $N'(x)$
ou $F'(x)$

Exemple:



- (au plus 6) équivalent à (≤ 6) donc on pourra lire la fréquence cumulée croissante en 6, c.à.d. $F(6) = 0,3$

- (plus de 6) équivalent à (> 6) donc on pourra lire la fréquence cumulée décroissante en 6, c.à.d. $F'(6) = 0,7$

- (moins de 6) équivalent à (< 6) équivalent à $(\leq 6-)$ où $-$ est une très faible valeur positive, donc on pourra lire la fréquence cumulée croissante en $6-$, c.à.d. $F(6-) = 0,2$

- (au moins 6) équivalent à (≥ 6) équivalent à $(> 6-)$ où $-$ est une très faible valeur positive, donc on pourra lire la fréquence cumulée décroissante en $6-$, c.à.d. $F'(6-) = 0,8$

Application :

Représentez graphiquement la distribution des 50 étudiants en fonction du nombre de personnes par ménage suivante :

Nombre de personnes par ménage x_i	Nombre d'étudiants n_i
3	5
4	15
6	15
7	10
8	5
Total	50

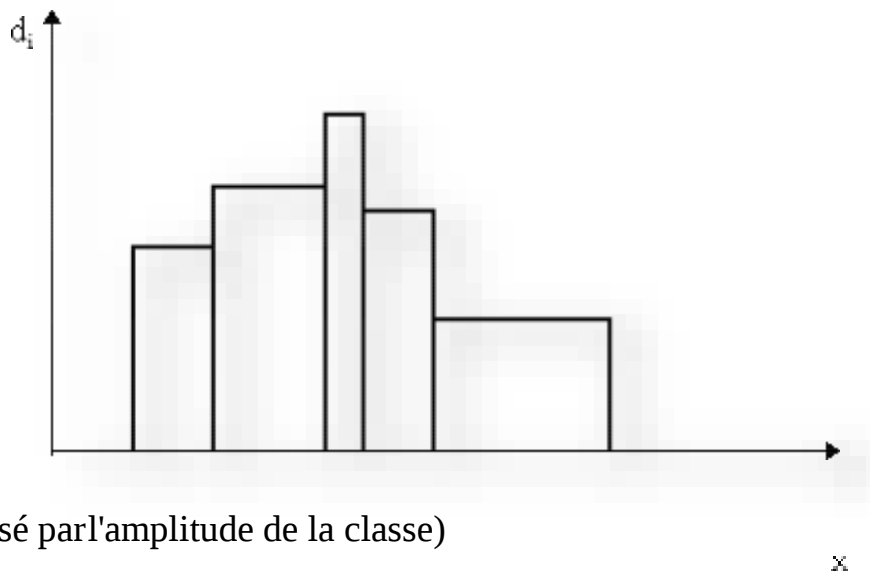
2) Variable classée

a-1 Diagramme différentiel : l'histogramme

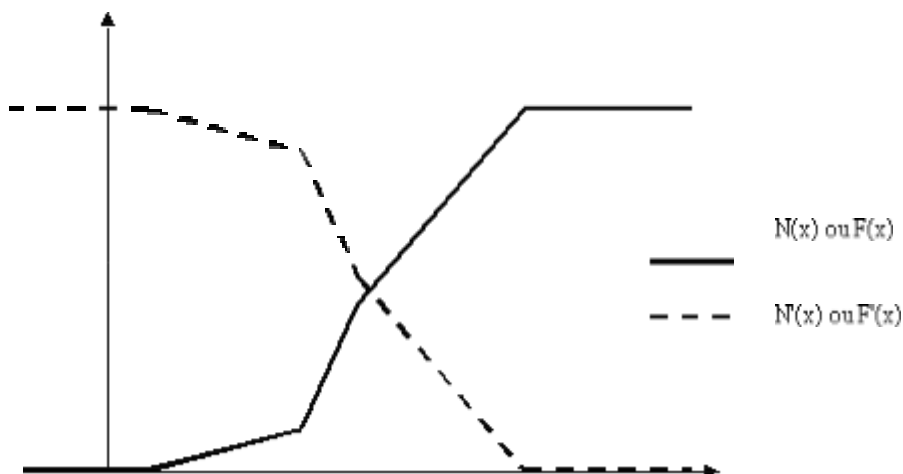
C'est un ensemble de rectangles contigus, chaque rectangle associé à chaque classe ayant une surface proportionnelle à l'effectif (fréquence) de cette classe.

Attention: Avant toute construction d'histogramme, il y a lieu de regarder si les classes sont d'amplitudes égales ou inégales.

Le cas des classes d'amplitudes égales ne pose aucune difficulté car il suffit de reporter en ordonnée l'effectif (la fréquence).
 Dans le cas d'amplitudes inégales on reporte en ordonnée la densité d_i (effectif

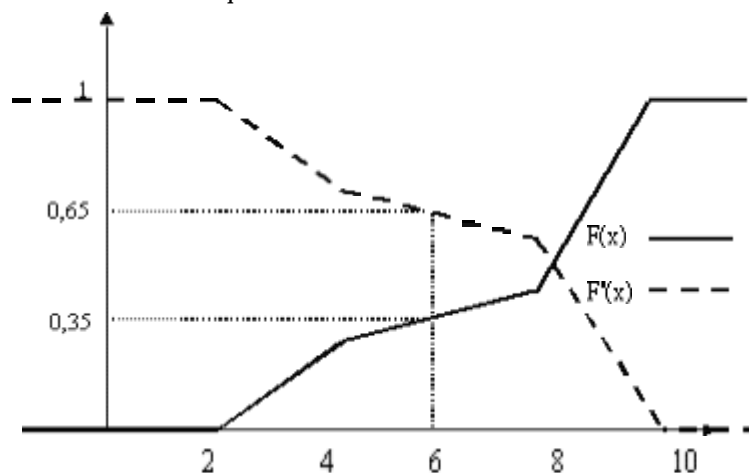


a-2 Diagrammes cumulatifs



L'utilisation des courbes est identique au cas discret.

Exemple:



Application :

Représentez graphiquement la distribution de 50 étudiants en fonction de leur taille suivante :

Taille en cm xi	Nombre d'étudiants
150-160	16
160-165	6
165-170	12
170-175	14
175-180	2
Total	50

OBJECTIF DU CHAPITRE II

Calculer les Caractéristiques des distributions

1-Calcul et interprétation juste des paramètres de tendance centrale

- b. Mode
- c. Médiane
- d. quartiles
- e. Moyennes

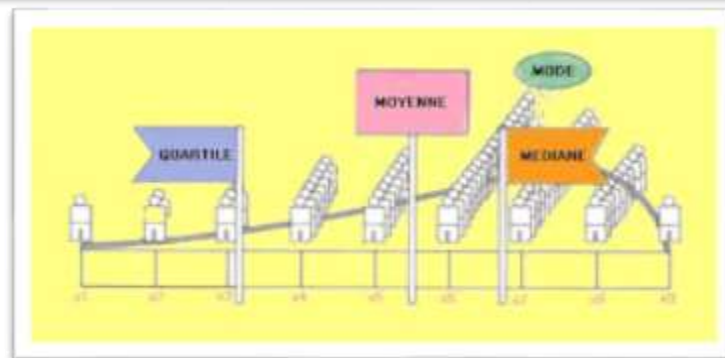
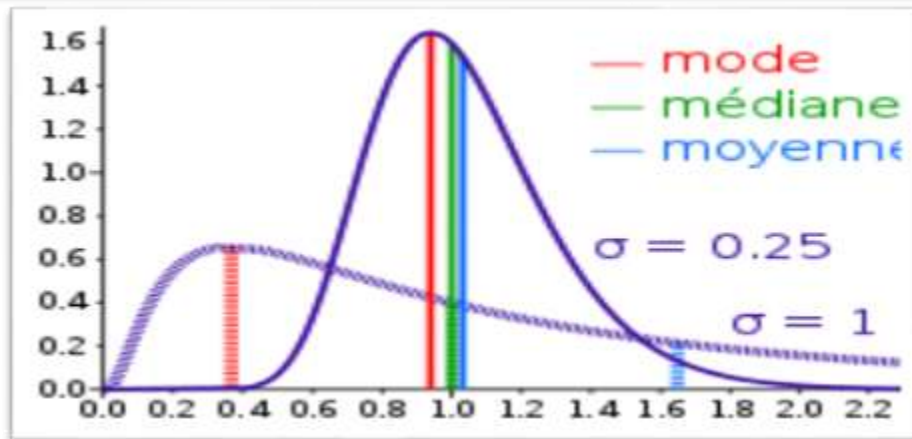
2-Calcul et interprétation correcte des paramètres de dispersion

- f. Étendue
- g. Écart absolu moyen et écart inter quantile
- h. Variance, écart-type et coefficient de variation

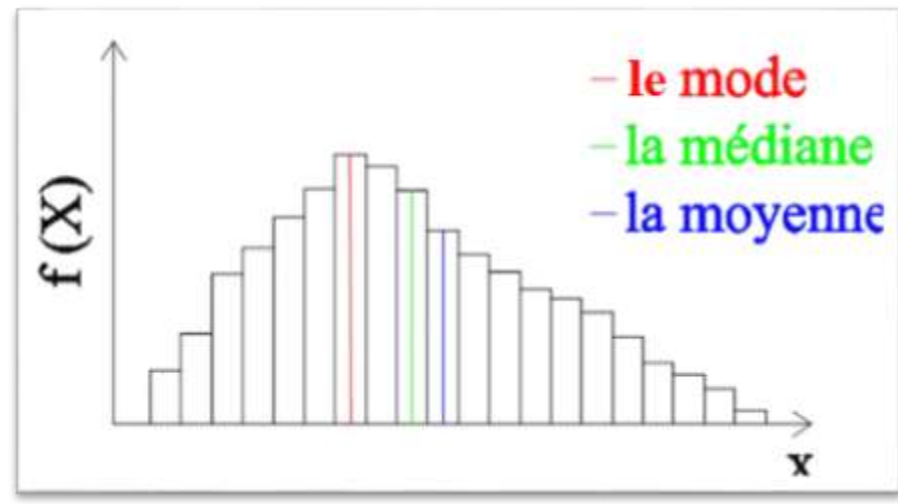
3-Déterminer les Liens entre deux variables

- Traitement du cas de deux caractères quantitatifs (coefficient de corrélation linéaire, ajustement par la droite des moindres carrés, rapport de corrélation)
- Traitement du cas d'un caractère quantitatif et d'un caractère qualitatif (rapport de corrélation)
- Traitement du cas de deux caractères qualitatifs

CHAPITRE II : LES CARACTÉRISTIQUES DES DISTRIBUTIONS



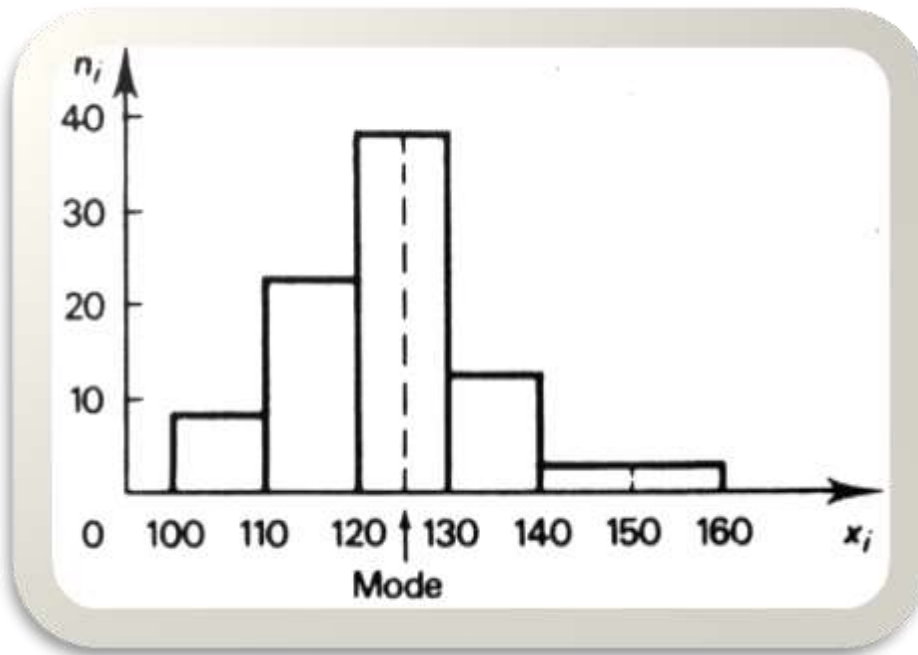
1 Caractéristiques de tendance centrale et de position :



Les caractéristiques de tendance centrale essayent de donner la valeur la plus représentative d'un ensemble de valeurs numériques.

a- Mode :

C'est la valeur observée d'effectif maximum.

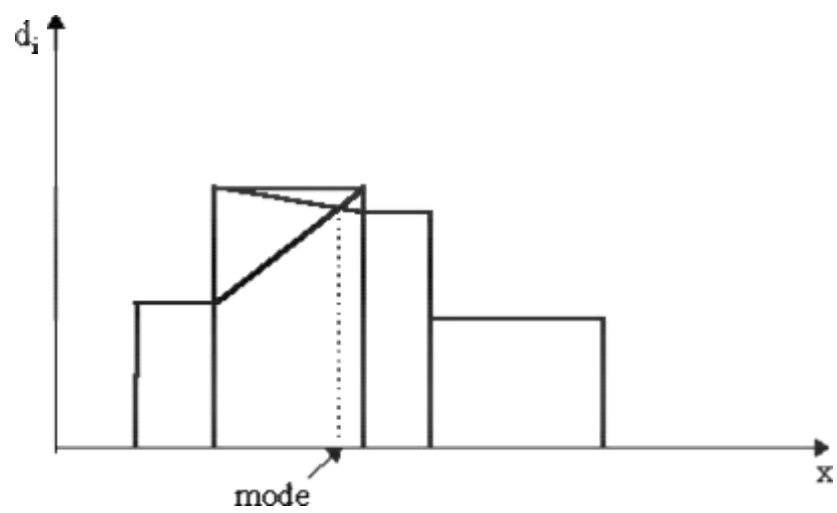


Variable discrète: classer les données par ordre croissant. Celle d'effectif maximum donne le mode.

Il est fortement conseillé d'utiliser le diagramme en bâtons pour déterminer le mode.

En effet, deux valeurs consécutives x_i , x_{i+1} peuvent avoir le même effectif maximum; on parlera d'intervalle modal $[x_i, x_{i+1}]$. Il peut aussi y avoir un mélange de deux populations qui conduit à un diagramme en bâtons où apparaissent deux bosses; on considérera deux modes. Il est déconseillé, sauf raison explicite, d'envisager plus de deux modes.

Variable classée: la classe modale correspond à la classe ayant l'effectif maximum. Il est fortement conseillé d'utiliser l'histogramme pour déterminer le mode. Comme pour le cas discret, on peut avoir deux classes modales. Toutes les valeurs de la classe pouvant a priori se réaliser, on ne se contentera pas de déterminer la classe modale. Une des valeurs de cette classe sera le mode. Certains auteurs préconisent par simplicité de prendre le centre de la classe modale. Il est préférable cependant de tenir compte des classes adjacentes de la manière suivante:



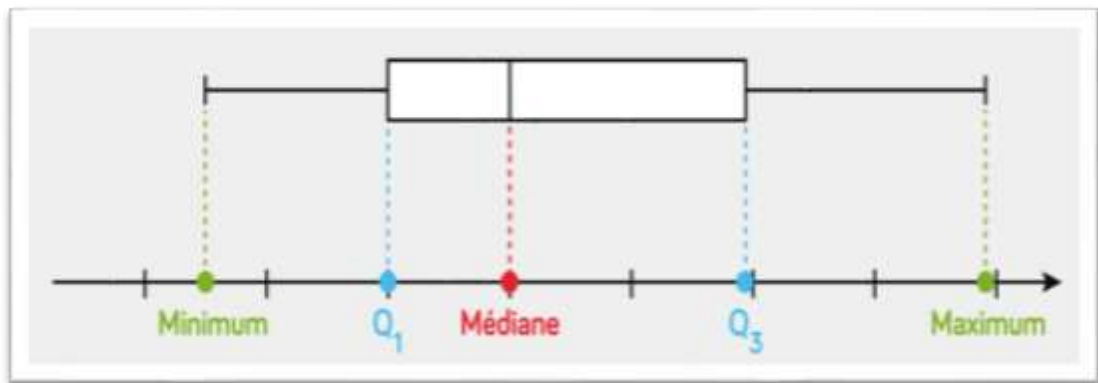
Application :

Déterminez la valeur modale de la distribution suivante, de 50 étudiants selon leur taille :

Taille en cm : x_i	Nombre d'étudiants : n_i
150-160	15
160-170	6
170-175	10
175-180	16
185-200	3
Total	50

Éléments de réponse :

$Mo = 173.77$ cm

b-Médiane

Les valeurs étant rangées par ordre croissant, c'est la valeur de la variable qui sépare les observations en deux groupes d'effectifs égaux.

Variable discrète : la détermination peut s'obtenir à partir du tableau statistique en recherchant la valeur de la variable correspondant à une fonction cumulée égale à $n/2$ (effectif cumulé) ou $\frac{1}{2}$ (fréquence cumulée). Il est encore plus facile de lire sur les graphiques cumulatifs les abscisses des points d'ordonnée $n/2$ (effectif cumulé) ou $\frac{1}{2}$ (fréquence cumulée). Si tout un intervalle a pour image $n/2$ ($\frac{1}{2}$ pour la fréquence), on parlera d'intervalle médian (on peut prendre le milieu de l'intervalle comme médiane)

Application :

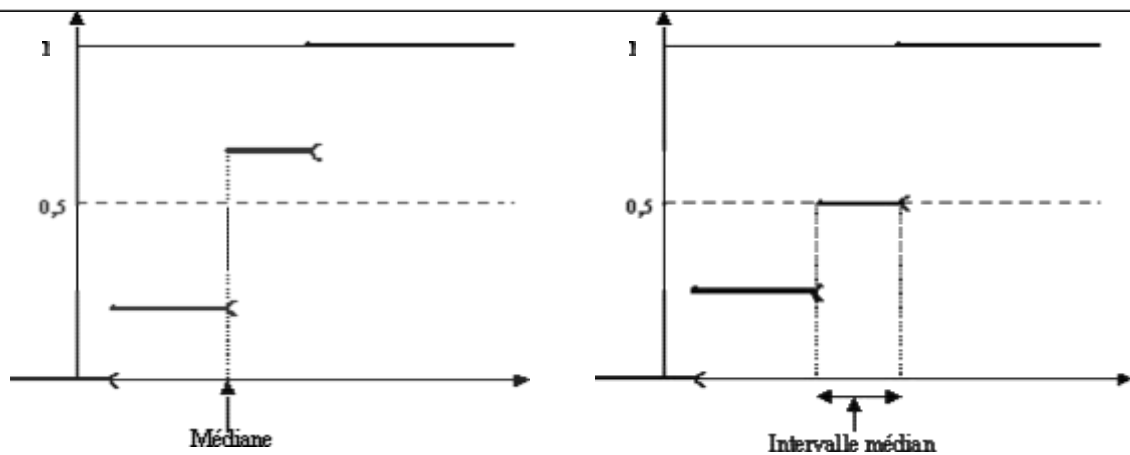
Soit la série statistique suivante :

19 17 20 18 17 17 20 19 15 16 20 23 22 14 15 24

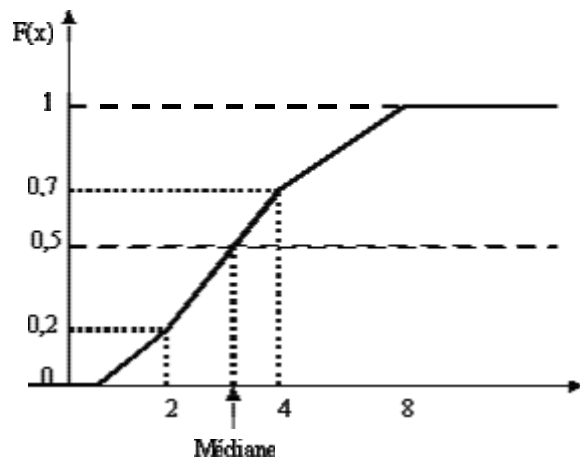
TAF : Calculez la médiane de cette série

Éléments de réponse :

Me=18.5



Variable classée: l'abscisse du point d'ordonnée $n/2$ ($\frac{1}{2}$ pour la fréquence) se situe en général à l'intérieur d'une classe. Pour obtenir une valeur plus précise de la médiane, on procède à une interpolation linéaire. La valeur de la médiane peut être lue sur le graphique ou calculée analytiquement.



$$\frac{Mé - 2}{4 - 2} = \frac{0,5 - 0,2}{0,7 - 0,2}$$

d'où la valeur de la médiane.

De manière générale, si a et b sont les bornes de la classe contenant la médiane, $F(a)$ et $F(b)$ les valeurs de la fréquence cumulée croissante en a et b , **alors**

$$Mé - a + (b - a) \times \frac{0,5 - F(a)}{F(b) - F(a)}$$

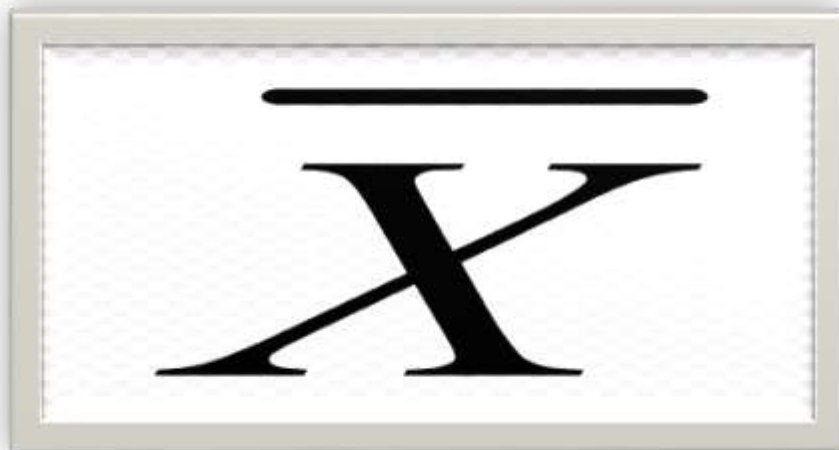
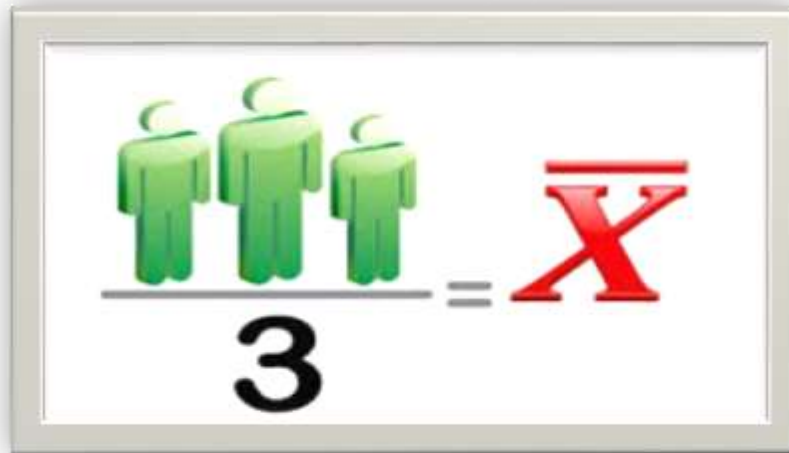
Application :

Déterminez la valeur médiane de la distribution des tailles suivantes : Taille

en cm x_i	Nombre d'étudiants n_i	▲N	▼N
150-160	15	15	50
160-165	5	20	35
165-170	10	30	30
170-175	18	48	20
175-180	2	50	2
Total	50	#	#

Eléments de réponse : Me = 167.5

c- Moyenne arithmétique :



Si x_i sont les observations d'une variable discrète ou les centres de classe d'une variable

la moyenne arithmétique $\bar{x}$ est égale à $\sum_{i=1}^k \frac{n_i x_i}{n} = \sum_{i=1}^k f_i x_i$

classée,

La moyenne arithmétique est un paramètre de tendance centrale plus utilisé que les autres de par ses propriétés algébriques.

a) Pour plusieurs populations d'effectifs $n_1, n_2, \dots, n_k$, de moyennes respectives

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \bar{x}_i}{n}$$

Moyenne globale = moyenne des moyennes

b) La moyenne arithmétique conserve les changements d'échelle et d'origine

$$\begin{aligned} x: (x_i, n_i) &\rightarrow y: (y_i = ax_i + b, n_i) \\ \bar{x} &\rightarrow \bar{y} = a\bar{x} + b \end{aligned}$$

Application :

Déterminez la taille moyenne des 50 étudiants dont la distribution par taille se présente comme suit :

Taille en cm x_i	Nombre d'étudiants
150-160	16
160-165	6
165-170	12
170-175	14
175-180	2
Total	50

Eléments de
réponse : $\bar{x} = 168.3$ cm

d- Moyenne géométrique :

Moyenne géométrique

Si x_i sont les observations d'une variable quantitative, la moyenne géométrique est égale à

$$G = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \times \dots \times x_k^{n_k}}$$

e- Moyenne harmonique :

$$H = \frac{\sum n_i}{\sum n_i \frac{1}{x_i}}$$

Si x_i sont les observations d'une variable quantitative, la moyenne harmonique est égale à

$$H = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{x_i}}{\sum_{i=1}^k n_i}$$

Il n'est pas évident d'utiliser ce type de moyenne.

Elle intervient lorsqu'on demande une moyenne de valeurs se présentant sous forme de quotient de deux variables x/y (km/h, km/litre,...). Attention, il faut cependant bien décortiquer le problème car il peut aussi s'agir d'une moyenne arithmétique.

Application :

Un cycliste effectue une traversée de 50 kms. Pendant les 20 premiers kms il roulait avec une vitesse constante de 40 km/h, les 15 kms suivants à une vitesse constante de 30 km/h. Du point kilométrique 35 au 55 la vitesse de notre cycliste n'est que de 10 km/h et au-delà du point kilométrique sa vitesse n'est que de 5 km/h.

TAF :

Quelle est la vitesse de ce cycliste sur l'ensemble du parcours ?

Éléments de réponse :

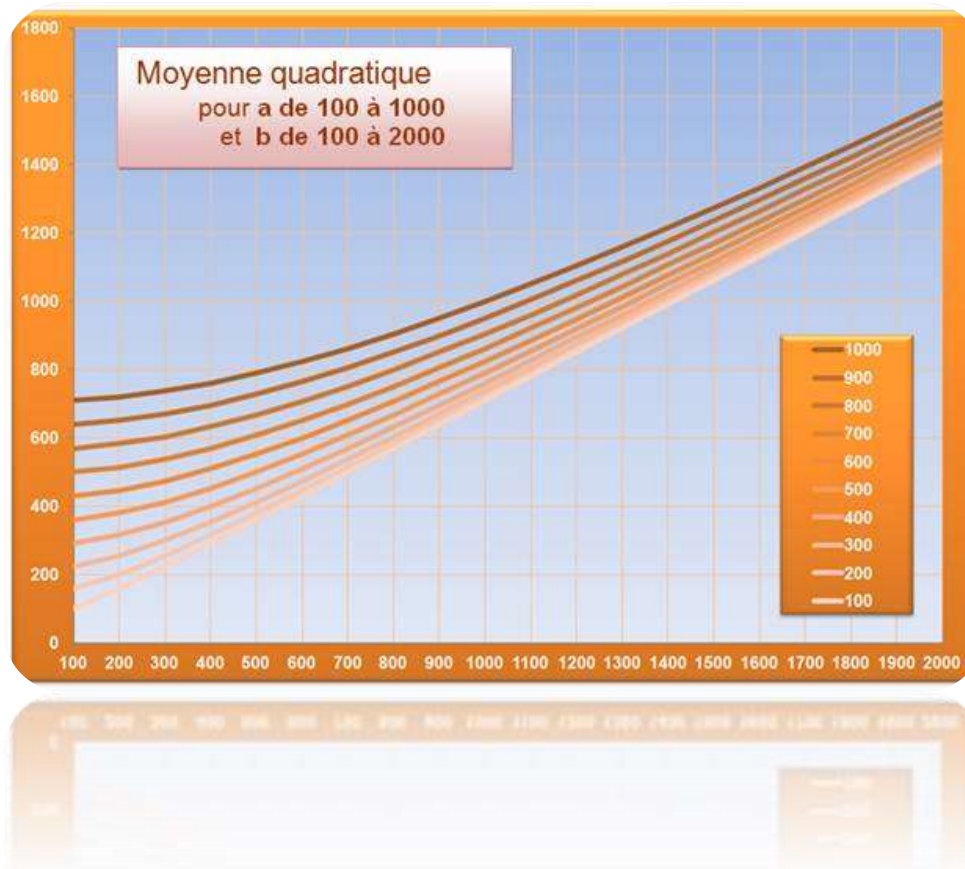
H = 16.67

f- Moyenne quadratique :

Si x_i sont les observations d'une variable quantitative, la moyenne harmonique est égale

$$Q = \sqrt{\frac{n_1 x_1^2 + \dots + n_k x_k^2}{n}}$$

à



G- Quartiles :

Ce sont des caractéristiques de position.

Il y a 1 médiane M_e qui sépare les observations en 2 groupes d'effectifs égaux

3 quartiles Q_1, Q_2, Q_3 qui séparent les observations en 4 groupes d'effectifs égaux

9 déciles $D_1, D_2, \dots, D_9$ qui séparent les observations en 10 groupes d'effectifs égaux

99 centiles $C_1, C_2, \dots, C_{99}$ qui séparent les observations en 100 groupes d'effectifs égaux

La détermination de ces caractéristiques est identique à celle de la médiane.

Les quartiles sont obtenus lorsqu'on a cumulé 25, 50, 75% de la population

Les déciles sont obtenus lorsqu'on a cumulé 10, 20, ..., 90% de la population

Les centiles sont obtenus lorsqu'on a cumulé 1, 2, ..., 99% de la population

Remarque : la notion de déciles et de centiles n'a de sens que s'il y a beaucoup d'observations et donc essentiellement pour une variable classée.

Application :

Soit la population de 80 salariés classés d'après le niveau de leur salaire journalier.

	Classes en dhs	Ni	ni cumulés
1	90 à 100	5	5
2	100 à 110	9	14
3	110 à 120	16	30
4	120 à 130	25	55
5	130 à 140	13	68
6	140 à 150	7	75
7	150 à 160	3	78
8	160 à 170	2	80
Total		80	

TAE : calculez la médiane et les deux quartiles

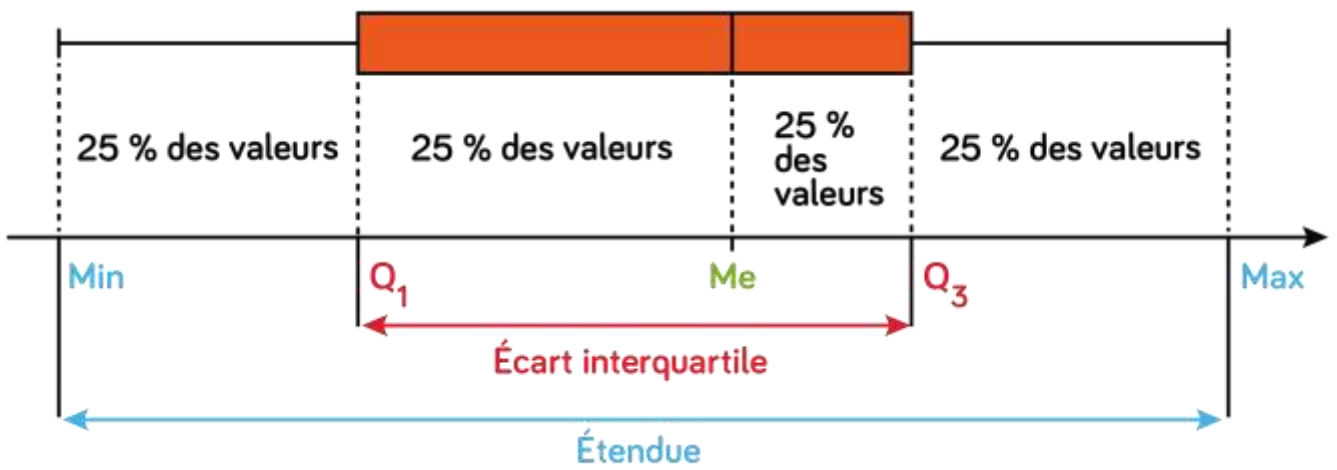
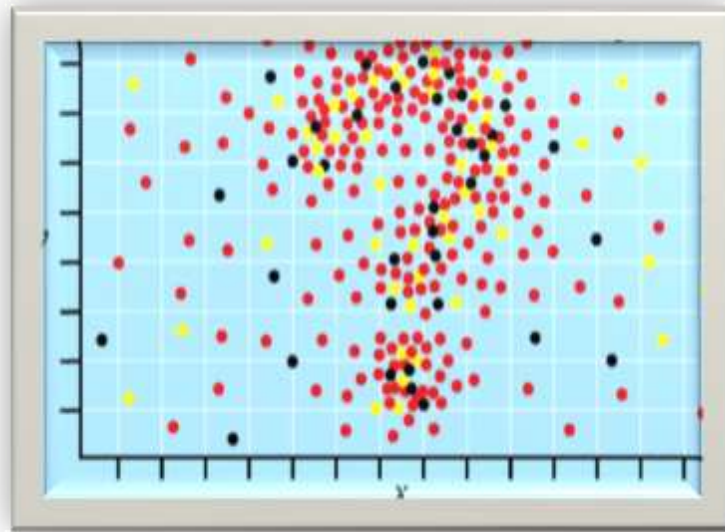
Eléments de réponse :

$$Me = 124$$

$$Q_1 = 110 + (10 \times 6) / 16 = 113.7$$

$$Q_3 = 130 + (10 \times 5) / 13 = 133.8$$

2-Caractéristiques de dispersion



Comme leur nom l'indique, ces caractéristiques essaient de synthétiser par une seule valeur numérique la dispersion de toutes les valeurs observées.

a- Étendue :



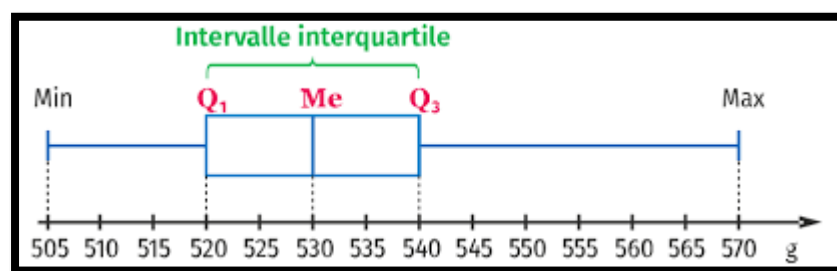
C'est la différence entre la plus grande et la plus petite observation

Application :

Quelle est l'étendue de la série statistique suivante : 10 390 395 405 410 1000

Éléments de réponse : Etendue = 990

b- Intervalle inter-quartile :



C'est la différence entre le troisième et le premier quartile

Application :

Reprenez les données de l'application sur les quartiles et calculez l'intervalle inter-quartile.

Éléments de réponse :

O3-O1=20

c- Variance et écart-type :

Variance

x_i	0	20	5	15
$P(X = x_i)$	0,5	0,1	0,2	0,2

$V(X)$
 $\sigma(X)$?

Si x_i sont les observations d'une variable discrète ou les centres de classe d'une variable classée, la variance

$$V \text{ est égale à } \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\text{On a aussi } V = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

c.à.d. moyenne des carrés - carré de la moyenne

On utilise plus couramment l'écart type qui est la racine carrée de la variance et qui a l'avantage d'être un nombre de même dimension que les données (contrairement à la variance qui en est le carré)

a) Pour plusieurs populations d'effectifs $n_1, n_2, \dots, n_k$, de moyennes respectives

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$, de variances $V_1, V_2, \dots, V_k$

Variance globale = variance des moyennes + moyenne des variances

$$V = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^k n_i V_i}{n}$$

où $\bar{\bar{x}}$ représente la moyenne des moyennes

b) changement d'échelle et d'origine

$$x: (x_i, n_i) \rightarrow y: (y_i = ax_i + b, n_i)$$

$$V_x \rightarrow V_y = a^2 V_x$$

d- Coefficient de variation :

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

C'est un coefficient qui permet de relativiser l'écart type en fonction de la taille des valeurs. Il permet ainsi de comparer la dispersion de séries de mesures exprimées dans des unités différentes



Applications :

App.1- Les séries suivantes représentent la mesure d'un caractère auprès des individus d'une population :

a. 6 1 8 10 5 4 11 3 2 9 7 12 13

b. 19 17 7 1 4 24 15 22 10 13

c. 15 12 17 15 20 15 20 15 15 9 7

d. 21 25 34 10 20 27 14 20 34

Dans chacun de ces cas calculez : la moyenne, la médiane, le mode ,la variance, l'écart type et le coefficient de variation.

Eléments de réponse :

a. $\bar{x}=7$, Me=7, pas de mode, $\sigma^2=14$, $\sigma=3.74$, V=53.4%

b. $\bar{x}=13.2$, Me=14, pas de mode, $\sigma^2=52.76$, $\sigma=7.26$, V=55%

c. $\bar{x}=14.5$, Me=15, Mo=15, $\sigma^2=14.61$, $\sigma=3.82$, V=26.3%

d. $\bar{x}=22.8$, Me=21, deux modes : 20 et 34, $\sigma^2=59.28$, $\sigma=7.70$, V=33.8%