

Corrigé divers électronique numérique (TD Ec3)

EXERCICE 3 : Signaux téléphoniques multiples temporellement

a) Le respect du critère de Shannon impose une fréquence d'échantillonnage F_e supérieure à 6 800 Hz, soit 6 800 échantillons par seconde au moins. En adoptant 8 000 échantillons par seconde, on satisfait ce critère et on laisse un intervalle de transition [3 400Hz, 4 600Hz] dans le gabarit du filtre passe-bas situé après le convertisseur numérique-analogique terminal (Fig. 30).

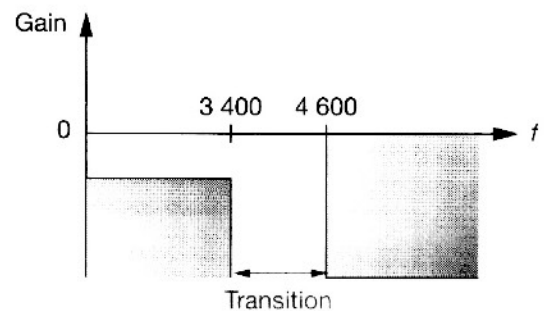


Figure 30

b) Chaque trame dure $T_e = \frac{1}{F_e} = 125 \mu s$, afin que chaque voix présente la fréquence d'échantillonnage définie. Pour les 30 communications d'une ligne, le débit est $2,4 \cdot 10^5$ échantillons utiles par seconde.

c) Chaque intervalle de temps comprend 8 bits, le débit est de ce fait $32 \cdot 8 000 \cdot 8 = 2,048 \cdot 10^6 \text{ bits.s}^{-1}$, on parle de 2 Mbit par seconde.

Déterminer le débit binaire, exprimé en bits par seconde, du signal complet.

d) L'erreur d'arrondi est au maximum égale au demi-pas de quantification $\varepsilon = \frac{q}{2}$. Choisir celle-ci constante, comme pour une loi linéaire, peut donner une forte erreur relative $\frac{\varepsilon}{s}$, en cas de faible amplitude de signal s . Au contraire, en répartissant inégalement les hauteurs des marches dans la loi de quantification, on fait en sorte que l'erreur relative varie peu avec l'amplitude du signal.

REMARQUE – Pratiquement, on parvient à rendre le rapport signal/bruit quasiment constant pour toutes les amplitudes de signal utiles.

EXERCICE 4 : CD audio

1. Les fréquences audibles vont de 20Hz à 20kHz. Le critère de Nyquist-Shannon impose au moins 2 points de mesure par période, soit une fréquence d'échantillonnage au moins double de

la plus haute fréquence que l'on souhaite restituer. Ici donc : $f_{\text{échant}} \geq 2 \cdot 20 \text{ kHz} = 40 \text{ kHz}$. La fréquence d'échantillonnage de 44,1kHz est compatible avec le critère de Nyquist-Shannon.

⇒ Méthode 22.1

2. a) Un son de $f_1 = 43 \text{ kHz}$ n'est pas audible lors du concert. Par contre, il est susceptible d'être capté par le microphone. Or l'échantillonnage à f_e est à l'origine d'un repliement du spectre, et fait donc apparaître la fréquence $f' = |f_e - f_1| = 1100 \text{ Hz}$, qui se trouve dans le spectre audible ! Cette fréquence f' qui n'était pas présente lors du concert sera enregistrée et envoyée au haut-parleur lors de l'écoute du CD !

b) Un filtre passe-bas anti repliement de fréquence de coupure $f_c = f_e / 2 = 22,5 \text{ kHz}$ est intercalé entre la sortie du microphone et le CAN. Il a pour rôle de supprimer toutes les fréquences susceptibles de se replier à plus basse fréquence (donc gênantes).

⇒ Méthode 22.3

c) Le problème qui se présente maintenant est que l'on ne sait pas construire un passe-bas qui laisse passer toutes les fréquences inférieures à f_c et coupe entièrement les fréquences supérieures à f_c . Le risque est de commencer à filtrer les hautes fréquences audibles... et à l'inverse, de garder un peu de fréquences supérieures à 20kHz susceptibles de se replier ! C'est la raison pour laquelle la fréquence d'échantillonnage est en fait supérieure à 40kHz : cela laisse une marge pour la transition.

→ les fréquences inférieures à $f_{\max} = 20\text{kHz}$ doivent passer à travers le filtre ;

→ les fréquences supérieures susceptibles de se replier en dessous de 20kHz doivent être coupées : ce sont les fréquences supérieures à $f_e - f_{\max} = 24,1\text{kHz}$.

Entre 20 et 24,1kHz, cela n'a pas d'importance : elles ne sont pas audibles, et le repliement n'est pas audible non plus. C'est la zone de transition du filtre passe-bas.

Enfin, plus l'ordre du filtre est grand, plus il coupe rapidement les fréquences supérieures à 20kHz.

3. a) La fréquence d'échantillonnage donne le nombre de mesures effectuées chaque seconde. Or chaque mesure contient 16 bits. Les 2 signaux du son stéréo occupent donc $N = 44\,100 \cdot 16 \cdot 2 = 1,41 \cdot 10^6$ bytes, soit $N = 1,41\text{Mb}$ par seconde d'enregistrement.

b) La durée d'enregistrement possible sur un CD enregistrable du commerce de 700Mo (soit $700 \cdot 8\text{Mb}$) est : $t = (700 \cdot 8) / 1,41 = 3970\text{s}$ soit **66 minutes**.

⇒ Méthode 22.1

✎ La durée d'enregistrement est un peu moins longue en réalité car on ajoute des bits de correction d'erreur qui permettent de corriger un peu le signal en cas de rayures... dans la limite du raisonnable !

c) Pour un format MP3, la durée d'enregistrement est multipliée par 4 à 20 : sur 700Mo, il est alors possible d'enregistrer 4 à 20 heures de concert !

EXERCICE 5 : Erreur de quantification et bruit

2. a) L'erreur d'arrondi prend ses valeurs dans l'intervalle $\left[-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right]$ (la valeur convertie est celle du palier le plus proche).

b) À partir d'un instant où la valeur convertie change de valeur (ϵ vaut alors $-\frac{q}{2}$), l'erreur croît linéairement dans le temps, jusqu'au nouveau changement de conversion. On en déduit la forme triangulaire de la fonction $\epsilon(t)$ sur une période (Fig. 37).

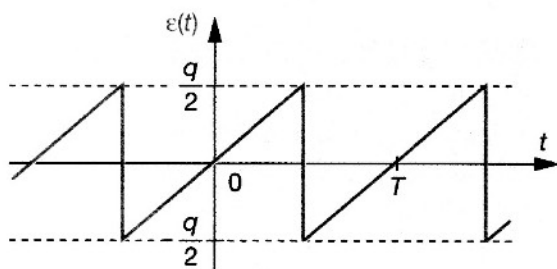


Figure 37

c) • Par symétrie, la valeur moyenne est nulle (fonction centrée sur 0).

• Le carré de $\epsilon(t)$ varie entre 0 et $\frac{q^2}{4}$ de manière parabolique. Si on adopte comme origine des temps un instant où ϵ s'annule, on peut proposer l'expression :

$$\epsilon^2(t) = \frac{q^2 t^2}{T^2},$$

entre $t = 0$ et $t = \frac{T}{2}$, où T est la période de $\epsilon(t)$.

La moyenne quadratique est donc donnée par :

$$MQ = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \epsilon^2(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{q^2 t^2}{T^2} dt = \frac{q^2}{12}.$$

• La valeur efficace est la racine carrée de la moyenne quadratique :

$$\epsilon_{\text{eff}} = \sqrt{MQ} = \frac{q}{2\sqrt{3}}.$$

Application numérique : pour un convertisseur à n bits, la relation donnant q est $q = \frac{\Delta s}{2^n - 1}$; on en déduit la relation générale :

$$\frac{\epsilon_{\text{eff}}}{\Delta s} = \frac{1}{2 \cdot (2^n - 1) \sqrt{3}} \simeq \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{3}}.$$

Pour 8 bits, ce rapport sans dimension vaut approximativement 10^{-3} , c'est-à-dire que la valeur efficace du bruit de quantification représente 0,1 % de l'amplitude maximale du signal.

Pour un convertisseur à 12 bits, ce rapport tombe à $7 \cdot 10^{-5}$. Néanmoins, lorsque le signal est de faible amplitude (ce qui se produit au cours du temps lors de l'évolution) l'erreur de quantification peut devenir sensible.

EXERCICE 6 : Conséquences de l'échantillonnage

1 Le spectre du signal échantillonné est représenté figure 1. Il est proche de celui du signal analogique sur la gamme de fréquences $[0, 400 \text{ Hz}]$, au pic à 3 kHz près, mais la suite est très différente en raison du repliement de spectre. Le son perçu (et donc le message transmis) est éloigné du signal original.

2 Pour se débarrasser du pic parasite il faudrait avoir filtré le signal avant numérisation avec un filtre passe-bas de fréquence de coupure de l'ordre de 4 kHz. On peut ensuite débarrasser le signal numérisé des fréquences supérieures à 4 kHz par un nouveau filtre passe-bas de même pulsation de coupure. Le résultat idéalement obtenu est présenté figure 2.

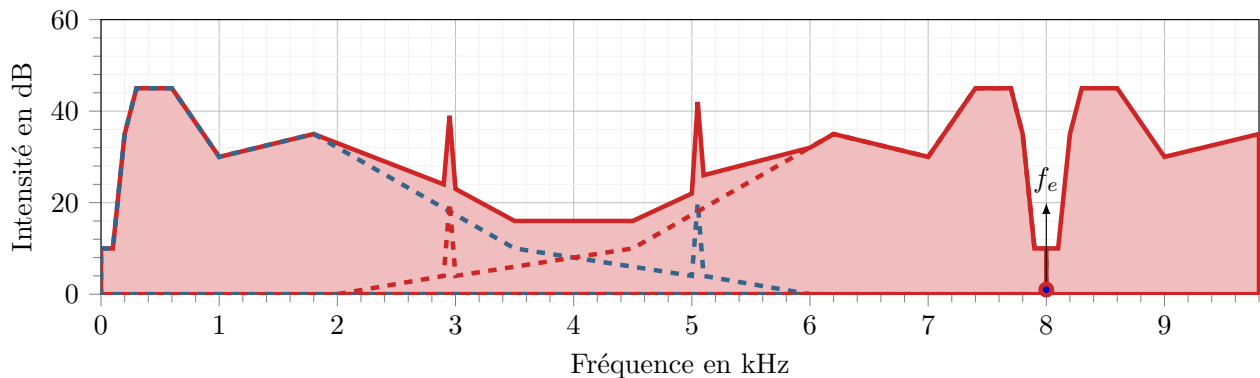


Figure 1 – Spectre du signal échantillonné.

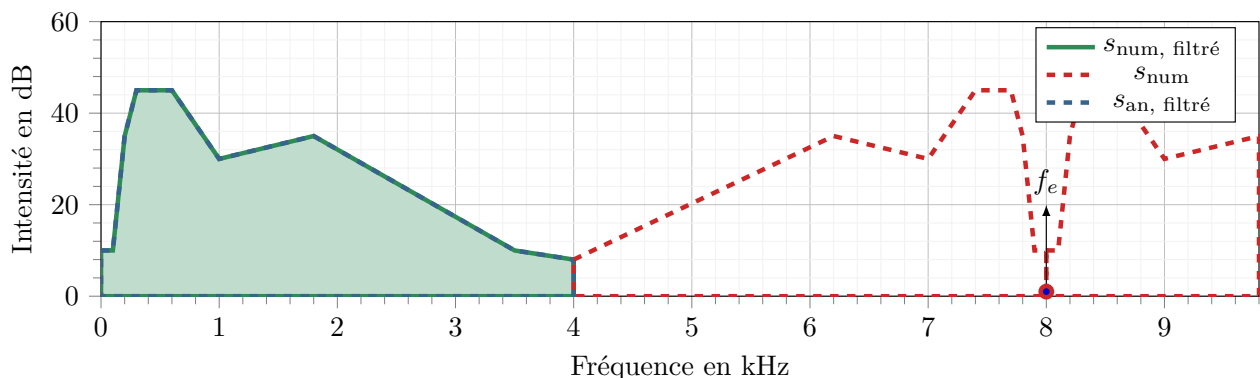


Figure 2 – Spectre obtenu avec filtre anti-repliement.

EXERCICE 7 : Repliement de spectre

- 1 Le critère de Shannon stipule qu'un signal est correctement échantillonné si la fréquence d'échantillonnage f_e et la fréquence maximale du spectre du signal $f_{\max}$ sont telles que

$$f_e > 2f_{\max}.$$

On déduit du spectre A $f_{\max} = 450 \text{ Hz}$, le critère de Shannon n'est donc **pas vérifié** pour le spectre B.

- 2 L'allure du spectre B s'explique par un phénomène de **repliement spectral** : au cours du processus d'échantillonnage, chaque pic à la fréquence f du signal analogique est répliqué à la fréquence $f_e - f$. La fréquence originale de chaque pic répliqué est indiquée entre parenthèses figure 3, on note que la réplique du pic à 250 Hz se superpose au pic lui-même.

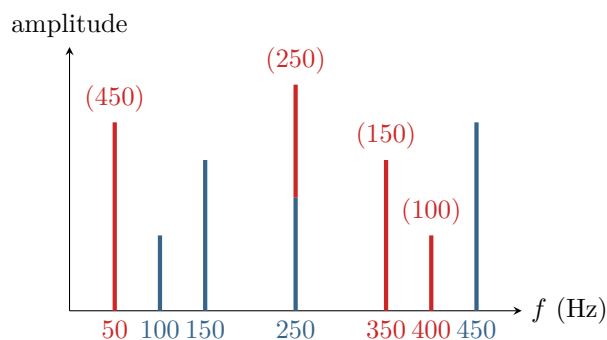


Figure 3 – Construction du spectre B.

- 3 Il faut utiliser un **filtre anti-repliement**, c'est-à-dire un filtre passe-bas, placé en amont de l'échantillonneur-bloqueur, qui va couper toutes les composantes du spectre dont on sait que la réplique va poser problème. Le repliement spectral apparaît pour les fréquences $f > f_e/2$, il faut donc choisir une fréquence de coupure inférieure à 250 Hz. Ce filtre permet certes d'éviter le repliement spectral, mais il enlève deux harmoniques parmi les quatre contenues dans le signal d'entrée : le signal est fortement affecté par l'opération.

EXERCICE 8 : CAN Parallèle sur 3 bits

1. Il n'y a aucune rétroaction sur aucun des ALI. Ils fonctionnent donc tous en régime saturé. Chaque ALI est un comparateur simple : si $V^+ < V^-$ alors $V_s = +V_{\text{sat}}$ et si $V^+ > V^-$ alors $V_s = -V_{\text{sat}}$.

2. $V_1^- = e$ par construction. Un pont diviseur de tension entre les tensions 0 et E_{ref} donne

$$V_1^- = \frac{R/2}{R/2 + 6R + 3R/2} E_{\text{ref}} = \frac{1}{16} E_{\text{ref}} = 0,5 \text{ V}.$$

Pour $e < 0,5 \text{ V}$ alors $V_{s1} = -V_{\text{sat}}$, et si $e > 0,5 \text{ V}$ alors $V_{s1} = +V_{\text{sat}}$.

3. $V^+ = e$ pour tous les ALI.

Un pont diviseur de tension donne $V_2^- = \frac{R + R/2}{R/2 + 6R + 3R/2} E_{\text{ref}} = \frac{3}{16} E_{\text{ref}} = 1,5 \text{ V}$, ce qui est le

seuil de basculement de l'ALI 2. De même $V_3^- = \frac{5}{16} E_{\text{ref}} = 2,5 \text{ V}$: c'est le seuil de basculement de l'ALI 3. Le seuil de basculement de l'ALI 4 est 3,5 V, de l'ALI 5 est 4,5 V, de l'ALI 6 est 5,5 V et de l'ALI 7 : 6,5 V.

Si $e = 0 \text{ V}$ au départ, tous les ALI sont saturés (-). En passant au dessus de 0,5 V, l'ALI 0 bascule à la saturation (+), puis à chaque fois que e augmente d'1 volt, un ALI supplémentaire bascule à la saturation (+). Pour une tension de n volt, il y a n ALI saturés (+).

4. Voir 2^e ligne tableau ci-dessous.

5. Le code obtenu n'est pas le code binaire voulu, conversion en base 2 du signal d'entrée. Le décodeur numérique a pour fonction de transformer le code binaire obtenu à la sortie des ALI en code binaire recherché. Il est composé de portes logiques.

Une porte logique combine des entrées logiques (0 ou 1) selon les lois de l'algèbre de BOOLE, comme les portes NAND (no and) par exemple.

e (V)	0	1	2	3	4	5	6	7
Sorties ALI	0000000	0000001	0000011	0000111	0001111	0011111	0111111	1111111
$a_2a_1a_0$	000	001	010	011	100	101	110	111

6. Dans l'exemple précédent, un convertisseur $n=3$ bits a nécessité 7 comparateurs soit $2^n - 1 = 2^3 - 1 = 7$.

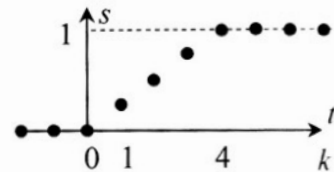
Pour un convertisseur 16 bits, comme chaque bit peut prendre la valeur 0 ou 1, il y a $2^{16} = 65\,536$ niveaux possibles (en comptant le 0), donc il faut utiliser 65 535 ALI placés en parallèle, ce qui est beaucoup trop ! Ce type de CAN est limité à 6 ou 8 bits dans la pratique.

Pour un CAN parallèle à n bits, il faudra $(2^n - 1)$ ALI : c'est le vieux problème du nombre de poteaux et d'intervalles....

EXERCICE 9 : Filtre numérique à « moyenne glissante » (convolution par un créneau)

1. Calculons les valeurs de s_k obtenues en réponse à un échelon de tension en remplissant le tableau ci-dessous (toutes les valeurs de tension sont en volt) :

k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
e_k	0	0	0	1	1	1	1	1	1
s_k	0	0	0	1/4	1/2	3/4	1	1	1



Le signal d'entrée est constant pour $t \geq 0$ (signal continu donc fréquence nulle). Après un régime transitoire de durée $4T_e$, s atteint un régime établi non nul : le signal continu passe, donc les basses fréquences passent. C'est *a priori* un passe-bas. Ce résultat était prévisible, car l'opération réalisée est une moyenne, qui conserve la composante continue.

Le gain est le rapport de s et de e en régime établi, soit $G(f=0) = 1$.

2. a) Pour la fréquence $f = f_e/4$, on a $e(t) = 1\cos(2\pi f t) = \cos(2\pi(f_e/4)t)$ avec $t_k = kT_e$

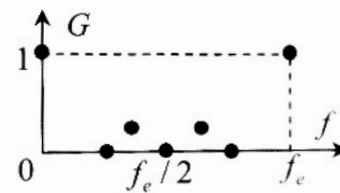
donc $e_k = \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)$. De même, $f = \frac{f_e}{3} \Rightarrow e_k = \cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right)$, $f = \frac{f_e}{2} \Rightarrow e_k = \cos(k\pi)$,

$f = \frac{2f_e}{3} \Rightarrow e_k = \cos\left(k\frac{4\pi}{3}\right)$, $f = \frac{3f_e}{4} \Rightarrow e_k = \cos\left(k\frac{3\pi}{2}\right)$, $f = f_e \Rightarrow e_k = \cos(2k\pi) = 1$.

	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{f_e}{4}$	$\cos(k\pi/2)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1
	s_k	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{f_e}{3}$	$\cos(2k\pi/3)$	1	-1/2	-1/2	1	-1/2	-1/2	1	-1/2	-1/2
	s_k	1/4	-1/8	-1/8	1/4	-1/8	-1/8	1/4	-1/8	-1/8
$\frac{f_e}{2}$	$\cos(k\pi)$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
	s_k	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{2f_e}{3}$	$\cos(4k\pi/3)$	1	-1/2	-1/2	1	-1/2	-1/2	1	-1/2	-1/2
	s_k	1/4	-1/8	-1/8	1/4	-1/8	-1/8	1/4	-1/8	-1/8
$\frac{3f_e}{4}$	$\cos(3k\pi/2)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1
	s_k	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Les valeurs de s_1 , s_2 et s_3 ont été obtenues à l'aide de la périodicité de e_k .

Pour $f = f_e$, e_k vaut toujours 1 donc s_k vaut toujours 1 également. Il est ainsi possible de relever l'amplitude des sinusoïdes échantillonnées s_k : 0 pour $f_e/4$ ainsi que pour $f_e/2$ et $3f_e/4$ et 1/4 pour $f_e/3$ ainsi que pour $2f_e/3$. L'amplitude du signal d'entrée étant 1 volt, ces valeurs sont la valeur du gain que l'on reporte sur le tracé ci-contre.



b) Le filtrage n'est pas progressif puisque la fréquence $f_e/4$ est totalement coupée alors que la fréquence $f_e/3$ (supérieure à $f_e/4$) passe à nouveau, du moins en partie ($G = 0,25$). Ce comportement est différent du passe-bas analogique. Les fréquences rejetées sont les fréquences multiples de $f_e/4$, à l'exception de f_e .

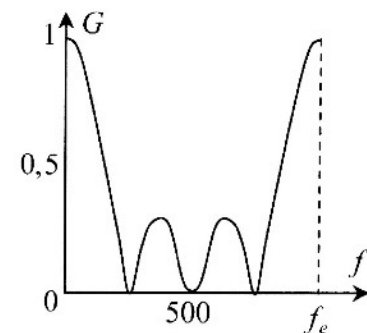
c) Comme on vient de le voir, la fréquence f_e passe totalement, ce qui est gênant pour un passe-bas ! Ceci s'explique par l'échantillonnage temporel du signal qui donne une périodicité dans le domaine fréquentiel ainsi qu'un repliement (symétrie par rapport à $f_e/2$) bien visible sur le tracé du gain ci-dessus. La précaution à prendre en amont est de ne pas avoir de fréquence supérieure à $f_e/2$ dans le signal d'entrée, en intercalant par exemple un filtre analogique passe-bas anti-repliement avant l'échantillonnage.

⇒ Méthode 22.1

3. Pour chaque fréquence, on estime l'amplitude du signal de sortie en prenant la valeur absolue maximale des valeurs de la ligne du tableau correspondante (cette méthode sous-estime un peu sa valeur). En résumé, voici les valeurs du gain correspondant à chaque fréquence ci-dessous.

$f(\text{Hz})$	0	100	200	250	300	333	400	500
G	1	0,75	0,25	0	0,17	0,25	0,25	0

Les valeurs du tableau sont limitées aux fréquences inférieures à $f_e/2$ du fait du repliement en fréquence. L'allure de la



courbe de gain est donnée figure ci-contre sur l'intervalle $[0 - f_e]$. La fréquence de coupure à -3dB correspond à $G = G_{\text{max}} / \sqrt{2} = 1 / \sqrt{2} \approx 0,71$. Or on remarque dans le tableau ci-dessus que $G = 0,75$ pour $f = 100\text{Hz}$. La fréquence de coupure est donc proche et légèrement supérieure à 100 Hz.

4. Pour $n = 10$, la fréquence de coupure est maintenant voisine de 50 Hz, par lecture directe sur le diagramme. Le filtre semble plus efficace quand n est augmenté. Par contre, les maxima secondaires restent encore voisins de 0,2 à 0,1. Les hautes fréquences, en dehors des fréquences rejetées, passent encore partiellement... et même passent complètement pour les fréquences proches de f_e ! Ce repliement en fréquence est dû à l'échantillonnage.

⇒ Méthode 22.1

Un passe-bas analogique n'a pas ce comportement, et coupe de plus en plus efficacement quand les fréquences augmentent.

On peut également vérifier par simple lecture du diagramme que les fréquences proportionnelles à $f_e/10$ sont complètement rejetées.

5. Pour éliminer le ronflement du secteur, il suffit d'échantillonner à une fréquence multiple de 50 Hz : $f_e = n \cdot 50\text{Hz}$, avec n d'autant plus grand que l'on veut éliminer d'harmoniques. On pourra ainsi éliminer totalement $(n-1)$ harmoniques du secteur. Attention cependant, car cela donne une fréquence de coupure très basse (inférieure à 50 Hz). Ce dispositif n'est applicable qu'aux systèmes très lents !