Chapitre 2 – Les intérêt simples – Exercices corrigés

Exercice 1

Un organisme financier vous propose pour 6 mois les deux types de placement suivants :
– placement A : intérêt simple postcompté au taux annuel de 5 % ;
– placement B : intérêt simple précompté au taux annuel de $4,9$ %.

Quel placement choisissez-vous ?

Corrigé

Les deux taux d'intérêt ne sont pas directement comparables.
Pour le placement B, on va calculer le taux d'intérêt effectif correspondant au taux de $4,9$ %. Celui-ci est égal à :

$$\frac{0,049}{1-0,049\times\dfrac{6}{12}}\approx 0,0502 \quad \text{soit} \quad 5,02\ \%.$$

Ce taux est supérieur au taux du placement A. On choisira donc le placement B.

Exercice 2

Un artisan doit encaisser $2\,500$ € dans 1 mois et $5\,000$ € dans 2 mois. Un banquier accepte de lui escompter ces deux traites. L'escompte global est de 100 € dont $6,25$ € de commissions et taxes.

Quel est le taux (facial) de l'escompte ?

Corrigé

i étant le taux annuel facial d'escompte commercial, l'escompte total est :

$$E_c = 2\,500\times i\times\frac{1}{12}+5\,000\times i\times\frac{2}{12}\cdot$$

En écrivant que $E_c = 100-6,25 = 93,75$, on obtient :

$$i = 0,09 \quad \text{soit} \quad 9\ \%.$$

Exercice 3

Un individu place 45 000 € pour trois mois à partir du 10 juin, au taux annuel de 4,8 %. De combien dispose-t-il à l'issue du placement ?

Corrigé

À la fin du contrat, il dispose d'une somme S :

$$S = 45\,000\ .\left(1+\frac{3}{12}\times 0,048\right) = 45\,540\ €.$$

Exercice 4

Un individu place 75 000 € du 15 mai au 18 septembre sur un compte rapportant 4,5 % l'an. De combien dispose-t-il à l'issue du placement ?

Corrigé

Durée du placement en jours : 16 + 30 + 31 + 31 + 18 = 126.
À la fin du contrat, l'individu dispose d'une somme S :

$$S = 75\,000 \,.\, \left(1 + \frac{0{,}045 \times 126}{360}\right) = 76\,181{,}25€.$$

Exercice 5

Au 1^{er} janvier, Mme Nicolet a sur son livret d'épargne $3\,951,84$ €.
– Le 9 février, elle dépose 400 € ;
– le 3 avril, elle dépose 500 € ;
– le 25 juillet, elle retire 1 200 €.
Le taux annuel d'intérêt est de 3 % et les intérêts (simples) sont calculés par quinzaines civiles complètes.

De quelle somme disposera-t-elle le 1^{er} janvier suivant ?

Corrigé

On peut utiliser deux méthodes pour calculer les intérêts.

Première méthode

On calcule les intérêts pour chaque quinzaine en fonction du capital déposé sur le livret ; *attention à ne pas incorporer les intérêts au capital en cours d'année.*

Du 1^{er} janvier au 15 février, les intérêts produits sont :

$$3\,951,84 \times 0,03 \times \frac{3}{24} = 14,82\,.$$

Du 15 février au 15 avril, les intérêts produits sont :

$$4\,351,84 \times 0,03 \times \frac{4}{24} = 21,76\,.$$

Du 15 avril au 15 juillet, les intérêts produits sont :

$$4\,851,84 \times 0,03 \times \frac{6}{24} = 36,39\,.$$

Du 15 juillet au 31 décembre, les intérêts produits sont :

$$3\,651,84 \times 0,03 \times \frac{11}{24} = 50,21\,.$$

Le montant total des intérêts est donc :

$$14,82 + 21,76 + 36,39 + 50,21 = 123,18 \text{ €}.$$

Donc la somme disponible au 1^{er} janvier suivant est égale à :

$$3\,651,84 + 123,18 = 3\,775,02 \text{ €}.$$

Seconde méthode

On calcule les intérêts produits par les divers versements (ou retraits) sur la période totale de placement et on ajoute ces intérêts en leur affectant le signe $+$ pour les versements et le signe $-$ pour les retraits.

On obtient les intérêts produits :

par $3\,951,84$ € sur un an :	$3\,951,84 \times 0,03 = 118,56$
par 400 € sur 21 quinzaines :	$400 \times 0,03 \times \dfrac{21}{24} = 10,50$
par 500 € sur 17 quinzaines :	$500 \times 0,03 \times \dfrac{17}{24} = 10,62$
par $1\,200$ € sur 11 quinzaines :	$1\,200 \times 0,03 \times \dfrac{11}{24} = 16,50$

Le montant des intérêts est :

$$118,56 + 10,50 + 10,62 - 16,50 = 123,18 \text{ €}.$$

Avec les versements et les retraits, la somme disponible est donc :

$$3\,951,84 + 400 + 500 - 1200 + 123,18 = 3\,775,02 \text{ €}.$$

Exercice 6

Quelle somme doit-on placer aujourd'hui, sur un compte rapportant à intérêts simples 3 % l'an, pour obtenir 5 000 € dans onze mois ?

Corrigé

Soit S_0 la somme que l'on doit placer. Il vient :

$$5000 = S_0\left(1 + \frac{11}{12} \times 0{,}03\right);$$

$$S_0 = \frac{5000}{\left(1 + \frac{11}{12} \times 0{,}03\right)} = 4866{,}18\text{€}.$$

Exercice 7

Un individu place sur un compte 2 700 €. Cent jours plus tard, il récupère 2 734 €. Quel est le taux d'intérêt versé ?

On a : $2734 - 2700 = 2700 \cdot i \cdot \frac{100}{360}$;

d'où : $i = \frac{2734 - 2700}{2700} \times \frac{360}{100} = 0{,}0453$, soit: 4,53 %.

Exercice 8

Un individu place 640 000 € à 4 % pour sept mois à intérêts précomptés. Quel est le taux effectif de ce placement ?

Corrigé

L'intérêt apporté par ce placement est :

$I = 640\,000 \times 0{,}04 \times (7/12) = 14\,933{,}33$ €.

Il place donc effectivement :

$640\,000 - 14\,933{,}33 = 625\,066{,}67$ €.

Et sept mois plus tard, il récupère 640 000 €.

Le taux effectif de ce placement est i' :

On a : $14\,933{,}33 = 625\,066{,}67 \times i' \times (7/12)$;

d'où : $i' = \frac{14\,933{,}33}{625\,066{,}67} \times \frac{12}{7} = 0{,}0410$, soit: 4,10 %.

Le taux effectif de placement peut être obtenu en appliquant directement la formule donnée plus haut :

$$i' = \frac{i}{1 - \frac{i.j}{360}} = \frac{0{,}04}{1 - \frac{0{,}04 \times 7 \times 30}{360}} ;$$

$$i' = \frac{0{,}04}{1 - 0{,}04 \times \frac{7}{12}} = 0{,}0410, \text{ soit: } 4{,}10\,\%.$$

Exercice 10

Une entreprise doit régler 100 000 € à l'échéance du 30 juin. Le 20 avril, elle demande de reporter l'échéance au 30 juillet.
Avec un escompte commercial au taux nominal de 8 %, quel est le montant du nouvel effet qui remplacera le premier ?

Corrigé

Il s'agit de déterminer le montant X payable le 30 juillet qui est équivalent au 20 avril à la première traite.
Le passage de la valeur acquise à la valeur actuelle (retour dans le temps) se fait en multipliant par $1 - it$.
Au 20 avril, la valeur de la première traite est :

$$100\,000\left(1 - 0,08 \times \frac{71}{360}\right)$$

et la valeur de la nouvelle traite :

$$X\left(1 - 0,08 \times \frac{101}{360}\right).$$

En écrivant que ces deux valeurs sont égales, on obtient :

$$X \approx 100\,682 \text{ €}.$$

Exercice 11

Une entreprise négocie un effet de commerce à échéance du 15 mai et de montant nominal 900 000 €, soixante-dix jours avant son échéance. Taux de l'escompte : 5,5 %. **1°/** Calculer l'escompte commercial E_C et la somme que recevra l'entreprise. **2°/** Calculer ce qu'aurait payé l'entreprise si l'on avait appliqué l'escompte rationnel (E_R). **3°/** Calculer le taux effectif de l'escompte commercial.

Corrigé

1°/ $E_C = 900\,000 \times 0{,}055 \times (70/360) = 9\,625{,}00$ €.

L'entreprise recevra donc : $S_0 = 900\,000 - 9\,625 = 890\,375$ €.

2°/ Si l'on applique l'escompte rationnel, on a :

$$E_R = 900\,000 \times \frac{0{,}055 \times 70}{360 + 0{,}055 \times 70} = 9\,523{,}16\text{F}.$$

La transformation de la créance en moyen de paiement serait moins onéreuse.

3°/ Appelons *i'* le taux effectif de l'escompte commercial.

La valeur de l'effet au jour de présentation est de 880 750 €. La valeur de l'effet à l'échéance, soixante-dix jours plus tard, est de 900 000 €.

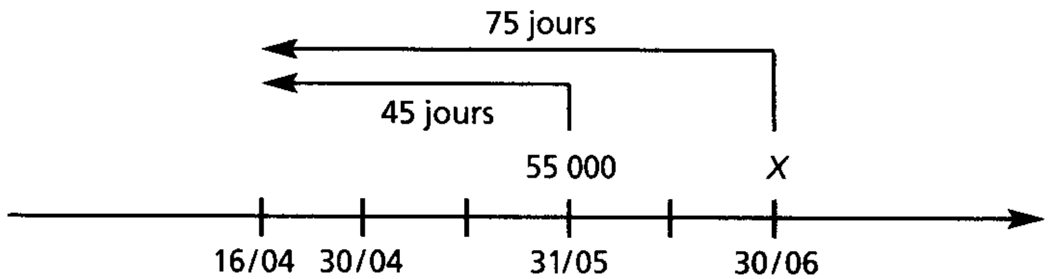
$$i' = \frac{900\,000 - 890\,375}{890\,375} \times \frac{360}{70} = 0{,}0556, \text{ soit} : 5{,}56\,\%.$$

Exercice 12

Une entreprise qui doit régler 55 000 € à échéance du 30 mai demande le 16 avril à son créancier de reporter l'échéance au 30 juin. Déterminer le montant nominal du nouvel effet que l'entreprise signera pour remplacer le premier (escompte commercial au taux de 6 %).

Corrigé

Deux effets sont dits équivalents lorsqu'ils ont même valeur actuelle à une date donnée. Cette date est appelée date d'équivalence.



Appelons X la valeur nominale du nouvel effet. Au 16 avril, les valeurs actuelles des deux effets sont égales :

$$X - X\,.\,(0{,}06)\,.\,(75/360) = 55\,000 - 55\,000\,.\,(0{,}06)\,.\,(45/360)\,;$$

$$X\left(1 - 0{,}06 \times \frac{75}{360}\right) = 54\,587{,}5\,;$$

$$X = 55\,278{,}48\ €.$$

L'entreprise signera un nouvel effet de montant nominal 55 278,48 € à échéance du 30 juin.

Exercice 13

1 – le 11/09/N, un effet de commerce de 12 600€, échéant le 12/10/N, est remis à l'escompte. Taux d'escompte : 10,8%. Calculer le montant net de la négociation.

Durée : 19 jours en septembre (30 – 11, on n'inclut pas le 11/09) et 12 jours en octobre = 31 jours.
Escompte = 12 600 x 0,108 x 31/360 = 117,18 €
Valeur nette = 12 600 – 117,18 = 12 482,82 €

**2 – Le 15/02/N, on remet à l'escompte un effet de 13 200 €, à échéance au 23/03/N. Taux d'escompte : 9,90%.
Calculer la valeur nette de l'effet. N n'est pas bissextile.**

Durée : 13 jours en février (28 – 15) et 23 en mars = 36 jours.
Escompte = 13 200 x 0,099 x 36/360 = 130,68 €
Valeur nette = 13 200 – 130,68 = 13 069,32 €

3 – La valeur nette d'un effet escompté sur 40 jours est de 9 903,33€. Sa valeur nominale est de 10 000€. Retrouver le taux d'escompte.

Valeur nette = valeur nominale - escompte
9 903,33 = 10 000 – 10 000 x i x 40/360
i = 8,7%

**4 – On veut remplacer le 10/4/N deux effets de commerce par un seul.
Caractéristiques de deux effets :
- effet 1. Valeur nominale : 2 000 € ; taux d'escompte : 10% ; échéance : 26/4/N
- effet 2. Valeur nominale : 2 300 € ; taux d'escompte : 9% ; échéance 8/5/N
Caractéristiques souhaitées de l'effet unique :
Echéance : 13/5/N ; taux d'escompte : 11%.
Quelle doit être la valeur nominale (V) de l'effet unique ?**

Pour que les deux groupes d'effets soient équivalents, ils doivent avoir la même valeur nette (actuelle) au 10/4/N
Valeur nette des deux effets au 10/4/N
Effet 1 : 2 000 – 2 000 x 0,1 x 16/360 = 1 991,11 €
Effet 2 : 2 300 – 2 300 x 0,09 x 28/360 = 2 283,90€
Valeur nette globale = 1 991,11 + 2 283,90 = 4 275,01

Si l'effet unique a pour valeur nette 4 275,01 :
4 275,01 = V – V x 0,11 x 33/360
V = 4 318,56€

5 – Le 01/09/N, on remplace un effet de 14 760€ à échéance au 15/10/N par un effet au 30/11/N. Quel est la valeur nominale du nouvel effet ? taux d'escompte : 10,2%.

Soit V, la valeur nominale du nouvel effet.
Sa valeur actuelle doit être égale à celle du premier, évaluée au 01/09/N.
Valeur actuelle du premier effet au 1/9 :
14 760 – 14 760 x 0,102 x 44/360 = 14 575,99
On a donc (sachant qu'il reste 90 jours avant le 30/11) :
V – V x 0,102 x 90/360 = 14 575,99
V = 14 957,41

Chapitre 3 – Les intérêts composés - Exercices

Exercice 1

Dans tout l'exercice, les intérêts sont supposés capitalisés annuellement.

1. On place $5\,000$ € pour 5 ans au taux annuel de $4,5$ %.
De combien disposera-t-on au terme du placement ?

2. Quelle somme doit-on placer aujourd'hui, au taux annuel de 5 %, pour disposer de $10\,000$ € dans 4 ans ?

3. On place aujourd'hui $5\,000$ € ; dans 3 ans, on dispose de $5\,921,44$ €.
Quel est le taux du placement ?

4. On place aujourd'hui $4\,000$ € au taux annuel de $5,2$ % et, au terme du placement, on disposera de $6\,000$ €.
Quelle est la durée du placement ?

1. On a $C_5 = 5\,000\,(1,045)^5 \approx 6\,230,91$ €.

2. On cherche C_0 tel que $10\,000 = C_0\,(1,05)^4$; d'où :

$$C_0 = 10\,000\,(1,05)^{-4} \approx 8\,227,02 \text{ €}.$$

3. Le taux annuel de placement i est solution de :

$$5\,921,44 = 5\,000\,(1+i)^3 \;;$$

d'où

$$(1+i)^3 = \frac{5\,921,44}{5\,000} = 1,184\,288 \iff 1+i = \sqrt[3]{1,184\,288} \approx 1,058\,.$$

On a donc $i \approx 0,058$ soit $5,8$ %.

4. La durée n du placement est solution de :

$$\begin{aligned}6\,000 = 4\,000\,(1,052)^n &\iff (1,052)^n = \frac{6\,000}{4\,000} = 1,5\\ &\iff n\,\ln(1,052) = \ln(1,5)\\ &\iff n = \frac{\ln(1,5)}{\ln(1,052)}\end{aligned}$$

soit $n = 8$.

Exercice 2

On considère deux placements à intérêts composés annuellement, l'un de 10 000 € à 6 %, l'autre de 9 000 € à 7 %.

Au bout de combien de temps auront-ils la même valeur acquise ? Et que sera cette valeur ?

Correction

La valeur acquise au bout de n années est de $10\,000\,(1,06)^n$ pour le premier placement et de $9\,000\,(1,07)^n$ pour le second.
La durée n conduisant à la même valeur acquise est donc solution de :

$$\begin{aligned}10\,000\,(1,06)^n = 9\,000\,(1,07)^n &\iff \left(\frac{1,06}{1,07}\right)^n = \frac{9\,000}{10\,000} = 0,9\\ &\iff n\ln\left(\frac{1,06}{1,07}\right) = \ln 0,9\\ &\iff n = \frac{\ln 0,9}{\ln\left(\frac{1,06}{1,07}\right)} \approx 11,2\end{aligned}$$

En utilisant $n = 11,2$ on obtient :

$$10\,000\,(1,06)^n = 19\,205,50 \quad \text{et} \quad 9\,000\,(1,07)^n = 19\,201,75.$$

La légère différence provient des arrondis.

Exercice 3

Calculer la valeur acquise d'un capital de 16 500 € placé à intérêts composés pendant 4 ans au taux annuel de 6,61%. En déduire le montant des intérêts.

Correction

$C_4 = 16\,500 \times 1{,}0661^4 = 21\,314{,}53$

Exercice 4

Compléter le tableau suivant :

	Taux proportionnels %				Taux équivalents %			
Taux annuel	6,00							3,75
Taux semestriel		3,50					2,10	
Taux trimestriel			3,40			2,08		
Taux mensuel				1,45	0,87			

Correction

	Taux proportionnels %				**Taux équivalents %**			
Taux annuel	6,00	7	13,6	17,4	10,95	8,58	4,24	3,753,75
Taux semestriel	3 (a)	3,50	6,8	8,7	5,33 (b)	4,2	2,10	1,85
Taux trimestriel	1,5	1,75	3,40	4,35	2,63	2,08	1,04	0,92
Taux mensuel	0,5	0,58	1,13	1,45	0,87	0,68	0,34	0,3

(a) 6 x ½ (b) $1 + 0{,}1095 = (1 + 0{,}0533)^2$

Exercice 5

On place 8 250 € à intérêts composés pendant 5 ans à un taux annuel variable. Si le taux est de 7,5% les deux premières années, 8% la troisième et 7% les deux dernières, quelle est la valeur acquise au bout de cinq ans ?

Correction

$C = 8\,250 \times 1{,}075^2 \times 1{,}08 \times 1{,}07^2 = 11\,788{,}60$

Exercice 6

Un capital de 24 000 € est resté placé pendant 7 ans au taux annuel de 7,6%. Quel est le montant des intérêts produits les trois dernières années ?

Correction

Valeur acquise au bout de 7 ans = $24\,000 \times 1{,}076^7 = 40\,077{,}18$
Valeur acquise au bout de 4 ans = $24\,000 \times 1{,}076^4 = 32\,170{,}69$
Intérêts des 3 dernières années = $C_7 - C_4 = 40\,077{,}18 - 31\,170{,}69 = 7\,906{,}49$

Exercice 7

On me propose de régler une dette de deux façons possibles :

- payer 5 820 € dans deux ans ;
- payer 7 537 € dans 5 ans.

Avec un taux d'actualisation de 9%, y a-t-il une solution que je doive préférer ?

Correction

$C_0 = 5\ 820 \times 1{,}09^{-2} = 4\ 898{,}58$
$C'_0 = 7\ 537 \times 1{,}09^{-5} = 4\ 898{,}53$
Les deux formules sont équivalentes.

Exercice 7 bis

Peut-on remplacer trois règlements :

- 10 684 € dans un an
- 14 427 € dans deux ans
- 15 432 € dans cinq ans

par un seul versement de 44 489 € dans quatre ans ? Taux d'actualisation de 12,20% ?

Correction

$C_0 = 44\ 489 \times 1{,}122^{-4} = 28\ 072{,}51$
$C'_0 = 10\ 684 \times 1{,}122^{-1} + 14\ 427 \times 1{,}122^{-2} + 15\ 432 \times 1{,}122^{-5} = 29\ 661{,}20$
Les deux formules ne sont pas équivalentes. On ne peut donc pas remplacer l'une par l'autre.

Exercice 8

Une personne dispose actuellement de 50 000 € qu'elle désire partager entre ses quatre enfants âgés respectivement de 10, 12, 14 et 16 ans.
Ces parts sont placées à intérêts composés annuellement, au taux annuel de 3,75 % supposé constant sur toute la période considérée.

Calculez les quatre parts de manière que les quatre enfants disposent du même capital à leur majorité (18 ans).

Correction

Notons C_1 la part de l'enfant âgé de 10 ans, C_2 celle de l'enfant âgé de 12 ans, C_3 celle de l'enfant âgé de 14 ans et enfin C_4 celle de l'enfant âgé de 16 ans.
C_1, C_2, C_3 et C_4 vérifient les relations :

$$\begin{cases} C_1\,(1{,}0375)^8 = C_2\,(1{,}0375)^6 = C_3\,(1{,}0375)^4 = C_4\,(1{,}0375)^2 \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 50\,000 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_2 = C_1\,(1,0375)^2 \\ C_3 = C_1\,(1,0375)^4 \\ C_4 = C_1\,(1,0375)^6 \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 50\,000 \end{cases}$$

d'où $C_1 + C_1\,(1,0375)^2 + C_1\,(1,0375)^4 + C_1\,(1,0375)^6 = 50\,000$.

Dans le premier membre, on a la somme de 4 termes d'une suite géométrique de premier terme C_1 et de raison $(1,0375)^2$.

On a donc $C_1\,\dfrac{1-(1,0375)^8}{1-(1,0375)^2} = 50\,000$ soit :

$$C_1 = 11\,155,15 \text{ €} \;;\; C_2 = 12\,007,47 \text{ €} \;;$$

$$C_3 = 12\,924,92 \text{ €} \;;\; C_4 = 13\,912,46 \text{ €}.$$

Exercice 9

En octobre 1999, la Poste a proposé un fond commun de placement *Bénéfic*.

1. La performance garantie est de +23 % à 3 ans, à condition que le CAC ne baisse pas. Quel est alors le taux actuariel brut ?
Si le CAC baisse de 10 % à 3 ans, le rendement de *Bénéfic* est de +13 %. Quel est alors le taux actuariel brut ?

2. Les droits d'entrée sont de 2 %. D'autre part, si le FCP est détenu dans un PEA ou un contrat d'assurance-vie respectant les délais légaux, les bénéfices sont exonérés d'impôts, mais subissent (à la clôture) des prélèvements sociaux de 10 % .
Quel est alors le taux actuariel net de rendement pour un placement de 3 ans, dans l'hypothèse où le CAC n'a pas baissé ?
Dans la même hypothèse, que devient le taux actuariel net de rendement avec des prélèvements fiscaux et sociaux de 25 % ?

Correction

1. Si i désigne le taux actuariel brut, le facteur multiplicatif au bout de 3 ans est de $(1+i)^3$.
Si le CAC n'a pas baissé, la Poste garantit que :

$$(1+i)^3 = 1,23 \iff 1+i = \sqrt[3]{1,23} \iff i \approx 0,0714 \text{ soit } 7,14\ \%.$$

Si le CAC a baissé de 10 %, la Poste garantit que :

$$(1+i)^3 = 1,13 \iff 1+i = \sqrt[3]{1,13} \iff i \approx 0,0416 \text{ soit } 4,16\ \%.$$

2. Considérons un particulier qui a investi 2000 €.
On lui prélève d'abord des droits d'entrée de $2000 \times 0,02 = 40$ € et on crédite son compte de $2000 - 40 = 1960$ €.
Si le CAC n'a pas baissé, son compte est devenu au bout de 3 ans :

$$1960 \times 1,23 = 2410,80 \text{ €}.$$

La plus-value est donc de $2410,80 - 2000 = 410,80$ €.

– Si les prélèvements sociaux sont de 10 %, le compte disponible au bout de 3 ans est de :

$$2410,80 - 410,80 \times 0,10 = 2369,72 \text{ €}.$$

Le taux actuariel net j_1 vérifie donc :

$$2369,72 = 2000\,(1 + j_1)^3 \iff j_1 \approx 0,0582 \quad \text{soit} \quad 5,82\ \%.$$

→ ***Remarque***

Quand vous observez la différence entre le taux actuariel brut et le taux actuariel net, n'oubliez pas que les bénéfices sont supposés exonérés d'impôts !

– Si les prélèvements fiscaux et sociaux sont de 25 %, le compte disponible au bout de 3 ans est de :

$$2410,80 - 410,80 \times 0,25 = 2308,10 \text{ €}.$$

Le taux actuariel net j_2 vérifie donc :

$$2308,10 = 2000\,(1 + j_2)^3 \iff j_2 \approx 0,0489 \quad \text{soit} \quad 4,89\ \%.$$

→ ***Remarque***

Ce taux a été obtenu dans l'hypothèse où le CAC n'a pas baissé !

Exercice 10

Je place sur un compte 10 000 € le 1/02/N. Je retire 2 000 € de ce compte le 31/3. J'y dépose 2 000 € le 1/05, puis je retire 500 € le 31/7. De quelle somme dispose-t-on le 31/12/N ?

Correction

Valeur acquise au 31/3, avant le retrait : 10 000 x $1,1^{2/12}$ = 10 160,12
Après le retrait, 10 160,12 – 2 000 = 8 160,12
Au 01/05, avant le dépôt : 8 160,12 x $1,1^{1/12}$ = 8 225,19
Après le dépôt : 8 225,19 + 2 000 = 10 225,19
Fin juillet : 101 225,19 x $1,1^{3/12}$ = 10 471,76
Après le retrait : 10 471,76 – 500 = 9 971,76
Au 31/12/N : 9 971,76 x $1,1^{5/12}$ = 10 375,73

Exercice 11

Une personne achète à une veuve de 70 ans une maison évaluée à 70 000 €.
Elle verse comptant 20 000 € et le reste sous forme d'une rente viagère annuelle dont le premier versement a lieu au moment du contrat.

Sachant que le taux actuariel est de 4,8 % et que l'espérance de vie d'une veuve de 70 ans est de 16 ans, calculez la première annuité :

1. dans le cas d'annuités constantes,

2. dans le cas d'annuités qui augmentent de 2 % par an.

Correction

Le nombre réel des annuités qui seront versées est inconnu puisque le paiement s'arrête lors du décès de la bénéficiaire. Mais on fait le calcul du montant de la rente viagère à partir des durées moyennes observées.
On peut supposer que le décès intervient après le paiement à la date 16 et on a alors $n = 17$.
Dans les deux cas, il s'agit d'annuités de début de période dont la valeur actuelle est $V_0 = 50000$ €.

1. Annuités constantes

De

$$50\,000 = a \times 1,048 \times \frac{1-(1,048)^{-17}}{0,048}$$

on déduit :

$$a = 4168,85 \text{ €}.$$

2. Annuités en progression géométrique de raison $q = 1,02$

De

$$50\,000 = \frac{a_1}{(1,048)^{16}} \times \frac{(1,048)^{17}-(1,02)^{17}}{1,048-1,02}$$

on déduit :

$$a_1 = 3620,72 \text{ €}.$$

Ce résultat est inférieur à celui de la question précédente puisque la valeur actuelle est la même, et les annuités à venir sont croissantes.

Remarque

Si l'on suppose que le décès intervient avant le paiement à la date 16, on a $n = 16$; on obtient alors $a = 4339,75$ et $a_1 = 3799,09$. Il est facile de comprendre que les assureurs font la première hypothèse pour déterminer les montants à payer.

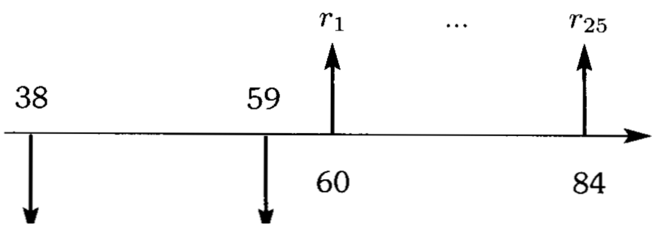
Exercice 12

Un individu de 38 ans pense à se constituer une retraite personnelle par capitalisation.
La phase d'épargne sera constituée par 22 versements constants, le premier intervenant à la signature du contrat.
La phase de retraite est constituée par une rente annuelle dont le premier versement aura lieu quand l'individu aura 60 ans.
Supposons que la rente attendue soit de 15 000 € la première année avec une revalorisation de 2 % par an, et qu'elle comporte 25 annuités.
Le taux d'intérêt annuel est de 5 %, aussi bien pendant la phase d'épargne que pendant la phase de retraite.

Quel est le montant de l'annuité d'épargne nécessaire ?

Correction

Désignons par a le montant de l'annuité constante lors de la phase d'épargne et par $r_1, \ldots, r_{25}$ les versements lors de la phase de retraite.
Le diagramme des flux financiers de l'ensemble des deux phases est :



Il s'agit d'écrire qu'il y a équivalence à intérêts composés, au taux d'actualisation de 5 %, entre l'ensemble des annuités versées lors de l'épargne et l'ensemble des rentes reçues lors de la retraite.
La valeur totale des retraites, actualisée à 60 ans, est :

$$V = \frac{15000}{(1,05)^{25}} \frac{(1,05)^{25} - (1,02)^{25}}{1,05 - 1,02} = 257\,762,25 \text{ €}.$$

La valeur totale des versements d'épargne, actualisée à 60 ans, est :

$$V = a\frac{(1,05)^{22} - 1}{0,05}.$$

En écrivant l'égalité de ces deux valeurs, on en déduit :

$$a = 6694,22.$$

Exercice 13

Quelle est la valeur actuelle de l'ensemble des capitaux suivants (à 8%) :

- 12 000 € à un an;
- 14 000 € à deux ans;
- 16 000 € à trois ans;
- 18 000 € à quatre ans

Correction

$C_0 = 12\,000 \times 1{,}08^{-1} + 14\,000 \times 1{,}08^{-2} + 16\,000 \times 1{,}08^{-3} + 18\,000 \times 1{,}08^{-4} = 49\,045{,}71$

Exercice 14

Un individu souhaite disposer dans trois ans d'une somme de 50 000 €. Il place à cet effet, en une seule fois, aujourd'hui, sur un compte à terme (taux d'intérêt 6 %), une somme dont on demande le montant.

Correction

Soit S_0 cette somme. On sait que $S_3 = 50\,000$.

$$S_0 = \frac{50\,000}{(1 + 0{,}06)^3} \quad ; \qquad S_0 = \frac{50\,000}{(1{,}06)^3}$$

La somme que place l'individu est donc : $S_0 = 41\,980{,}96$ €.

Exercice 15

Un individu place aujourd'hui 50 000 € sur un compte à terme, au taux de 4 % l'an. Combien d'années doit durer ce placement pour qu'il puisse disposer de 60 832,65 € ?

Correction

$S_0 = 50\,000$;

$S_n = 60\,832{,}65$;

$i = 0{,}04$.

L'application de la formule de base donne :

$$60\,832{,}65 = 50\,000\,(1{,}04)^n\ ;$$

d'où : $\ln 60\,832{,}65 = \ln 50\,000 + n\,.\,\ln 1{,}04$;

$$n = \frac{\ln (60\,832{,}65) - \ln (50\,000)}{\ln (1{,}08)}\ ;$$

$$n = \frac{11{,}01587 - 10{,}81978}{0{,}03922} = 5{,}02\ ;$$

$n = 5$, soit une durée du placement de cinq ans.

Exercice 16

On propose le contrat de placement suivant : vous placez aujourd'hui, en une seule fois, une somme de 50 000 €. Le taux d'intérêt versé est de 3 % pour chacune des trois premières années du placement. Ce taux d'intérêt est porté à 6 % pour les années suivantes. **1°/** De quelle somme dispose-t-on au bout de trois ans ? **2°/** De quelle somme dispose-t-on au bout de sept ans ? **3°/** Quel est, dans ce dernier cas, le taux moyen annuel du placement?

Correction

1°/ Soit $S_0 = 50\,000$, la somme initialement placée.

Elle devient : $S_3 = 50\,000\ (1{,}03)^3$;

$S_3 = 50\,000\ (1{,}09273)$;

$S_3 = 54\,636{,}35$.

2°/ Cette somme S_3 est ensuite placée à 6 %. On a donc, la septième année (soit quatre ans plus tard) :

$S_7 = S_3\ (1{,}06)^4$;

$S_7 = 54\,636{,}35\ (1{,}06)^4$;

$S_7 = 54\,636{,}35\ (1{,}26248)$;

$S_7 = 68\,977{,}13$.

3°/ La recherche du taux i moyen annuel de placement conduit à écrire :

$S_7 = S_0\ (1 + i)^7$;

$68\,977{,}13 = 50\,000\ (1 + i)^7$;

$$i = \left(\frac{68\,977{,}13}{50\,000}\right)^{1/7} - 1 = 0{,}047, \quad \text{soit} : 4{,}7\ \%.$$

On peut ici obtenir le résultat indépendamment de la connaissance de la somme placée.

$S_7 = S_0\ (1 + i)^7$ (1)

or : $S_7 = S_3\ (1{,}06)^4$;

$S_3 = S_0\ (1{,}03)^3$;

d'où : $S_7 = S_0\ (1{,}03)^3\ (1{,}06)^4$ (2)

En utilisant les relations (1) et (2), il vient :

$$(1 + i)^7 = (1{,}03)^3\ (1{,}06)^4\ ;$$

$$1 + i = [(1{,}03)^3\ (1{,}06)^4]^{1/7}\ ;$$

$$i = [(1{,}03)^3\ (1{,}06)^4]^{1/7} - 1\ ;$$

$$i = [1{,}37954]^{1/7} - 1 = 0{,}047, \quad \text{soit : } 4{,}7\ \%.$$

Le contrat proposé est équivalent à un placement d'une durée de sept ans au taux annuel, identique tous les ans, de 4,7 %.

Exercice 17

Quelle est la valeur actuelle d'un capital de 168 505,82 € dans 5 ans, au taux d'actualisation annuel de 11% ?

Correction

$C_0 = 168\ 505{,}82 \times 1{,}11^{-5} = 100\ 000$

Exercice 18

On place chaque année 5 000 € sur un compte rémunéré à 6%, pendant 7 ans. Calculer de deux façons la valeur acquise du capital au début de la 8ème année.

Correction

méthode 1 : $C = 5\ 000 \times 1{,}06^7 + 5\ 000 \times 1{,}06^6 + \ldots + 5\ 000 \times 1{,}06^2 + 5\ 000 \times 1{,}06 + 5\ 000 = 49\ 487{,}34$
méthode 2 : $C' = 5\ 000\ (1{,}06^8 - 1) / 0{,}06 = 49\ 487{,}34$

Exercice 19

Que valent aujourd'hui 10 versements annuels (le premier intervenant dans un an) de 500 €, actualisés à un taux de 10% ?

Correction

$C_0 = 500 \times (1 - 1{,}1^{-10})/0{,}1 = 3\ 072{,}28$

Exercice 20

Quelle est la valeur actuelle de la somme des capitaux suivants (taux d'actualisation 7%) :

- 4 900 €,17 € à 3 ans
- 1 572,96 € à 4 ans
- 12 005,84 € à 6 ans

Correction

$C_0 = 4\ 900 \times 1{,}07^{-3} + 1\ 572{,}96 \times 1{,}07^{-4} + 12\ 005{,}84 \times 1{,}07^{-6} = 14\ 061{,}69$

Exercice 21

Calculer la valeur acquise par un capital de 32 600 € placé à intérêts composés pendant 2 ans et 7 mois, au taux annuel de 7,75%.

Correction

$C = 32\ 600 \times 1{,}0775^{2+7/12} = 39\ 533{,}22$

Exercice 22

Quelle est la valeur acquise de 30 versements mensuels de 1 000 € placés au taux d'intérêt de 4% :

- juste après le dernier versement ?
- un an après le dernier versement ?

Correction

- $C_{30} = 1\ 000 \times (1{,}04^{2,5} - 1)/(1{,}04^{1/12} - 1) = 31\ 468{,}57$
- $C_{30} = 31\ 468{,}57 \times 1{,}04 = 32\ 727{,}31$

Exercice 23

Au taux d'actualisation de 5%, préférez vous recevoir 1 000€ chaque année pendant 5 ans (premier versement dans un an) ou 4 800 € aujourd'hui ?

Correction

$V_0 = 1\ 000 \times (1 - 1{,}05^{-5})/0{,}05 = 4\ 329{,}48$
Il est préférable d'accepter 4 800 € aujourd'hui.

Exercice 24

On place les sommes suivantes au taux annuel de 8,5% :

- le 1/1/N : 12 620 €
- le 1/1/N+1 : 14 870 €
- le 1/1/N+2 : 6 410 €

Quelle somme retirerons nous le 1/1/N+4 ?

Correction

$C = 12\ 620 \times 1{,}085^4 + 14\ 870 \times 1{,}085^3 + 6410 \times 1{,}085^2 = 44\ 025$

Exercice 25

Un capital de 20 000 € est placé à intérêts composés pendant 11 ans. La valeur acquise au terme de cette durée s'élève à 46 632,78 €.

Déterminer le taux de placement.

Correction

$$46\,632{,}78 = 20\,000\,(1+i)^{11}$$

$$(1+i)^{11} = \frac{46\,632{,}78}{20\,000} = 2{,}331639$$

$$i = (2{,}331639)^{\frac{1}{11}} - 1 = 0{,}08 \text{ soit } 8\ \%.$$

Détermination à l'aide des tables financières

$$(1+i)^{11} = 2{,}331639$$

Cherchons cette valeur dans la table financière n° 1, en procédant à un balayage horizontal, à partir de $n = 11$, destiné à trouver la valeur 2,331639. Une fois trouvée, le taux correspondant figure en en-tête de colonne.

n \ i	.... 8 % ....
:	↑
11 ————————→	2,331639
:	

Exercice 26

Le cours d'un titre T1 a progressé de 12% la première année, 10% la deuxième et a baissé de 3% la troisième année. Le cours d'un titre T2 a progressé de 6,5% chaque année.

Quel titre a été le plus rentable ?

Correction

1) Soit $\bar{t}_1$ le taux moyen de croissance du cours du titre 1. Ce taux satisfait l'égalité suivante :

$$(1+\bar{t}_1)^3 = (1+0{,}12)\,(1+0{,}10)\,(1-0{,}03)$$

$$\bar{t}_1 = [(1{,}12)\,(1{,}10)\,(0{,}97)]^{\frac{1}{3}} - 1 = 0{,}061192 \text{ soit} \simeq 6{,}12\ \%.$$

Le taux de croissance du titre 2 étant chaque année le même, il n'est pas utile de calculer le taux moyen : celui-ci est égal à 6,50 %.

Le choix de l'investisseur se portera naturellement sur le titre 2 dont le taux moyen de croissance est supérieur à celui du premier titre. Ce choix se fonde implicitement sur l'hypothèse que les évolutions passées des cours de ces deux titres vont se reproduire à l'identique ou presque à l'avenir, or rien n'est moins sûr. Un autre facteur doit également être pris en considération : le risque. Celui-ci se mesure dans le cas présent par le degré de variation des taux de croissance. Il est plus important pour le premier titre que pour le second, induisant ainsi un risque plus élevé, alors que le rendement proposé en échange de ce risque accru est plus faible que celui offert par le second titre.

2) Désignons par $\bar{t}$ le taux moyen de croissance du cours sur 6 ans. Ce taux doit satisfaire l'égalité suivante :

$$(1+\bar{t})^6 = 2$$

$$\Rightarrow \bar{t} = 2^{\frac{1}{6}} - 1 = 0{,}122462 \text{ soit} \simeq 12{,}25\ \%.$$

Exercice 27

On verse n annuités de 16 800€ chacune, rémunérées au taux annuel de 9%. La valeur acquise au terme du dernier versement est de 169 592,06€.

Calculer n.

Correction

Expression de la valeur acquise

$$16\,800\,\frac{(1{,}09)^n-1}{0{,}09} = 169\,592{,}06$$

$$\frac{(1{,}09)^n-1}{0{,}09} = \frac{169\,592{,}06}{16\,800} = 10{,}094765$$

1re méthode : résolution par le calcul direct

$$(1{,}09)^n = [(10{,}094765)\,(0{,}09)] + 1$$

$$n = \frac{\ln 1{,}908529}{\ln 1{,}09} = 7{,}499999$$, soit ≈ 7,50 ans ou 7 ans et 6 mois.