

LA METHODE HONGROISE POUR RESOUDRE LE PROBLEME D'AFFECTION EXPLIQUEE PAS A PAS

Par : Abdel YEZZA, Ph.D

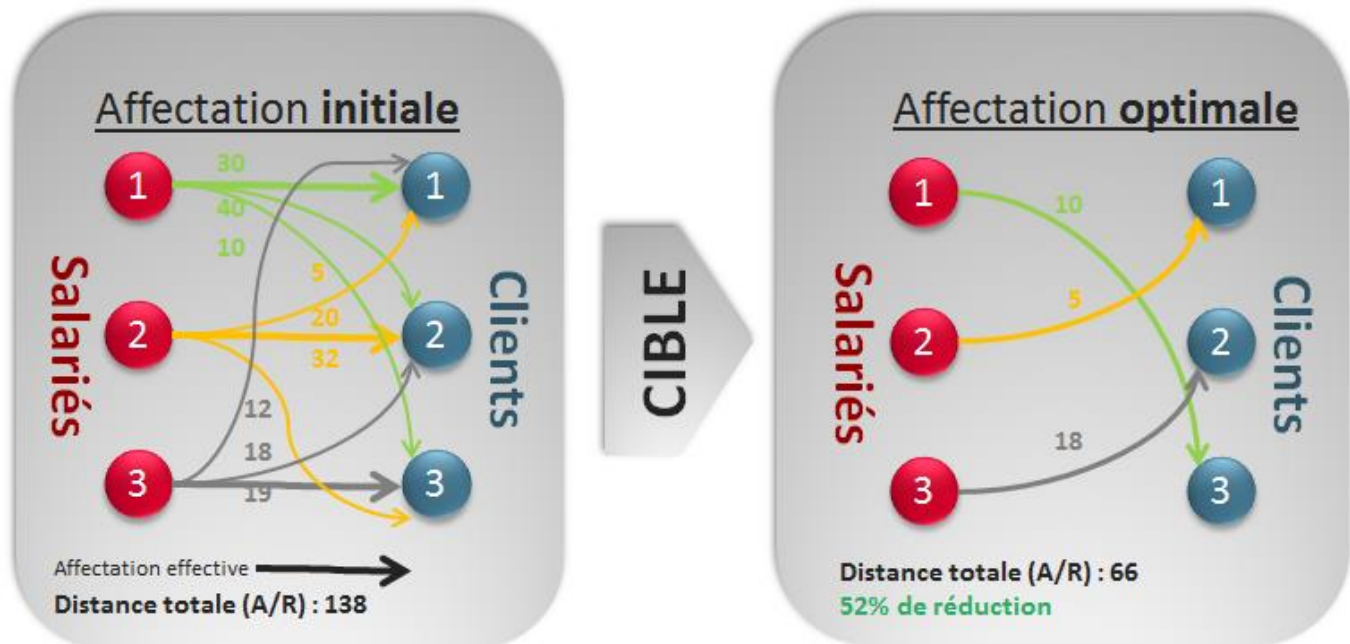
Date : juillet 2015

Télécharger le fichier EXCEL : [assignment-problem.xls](#)

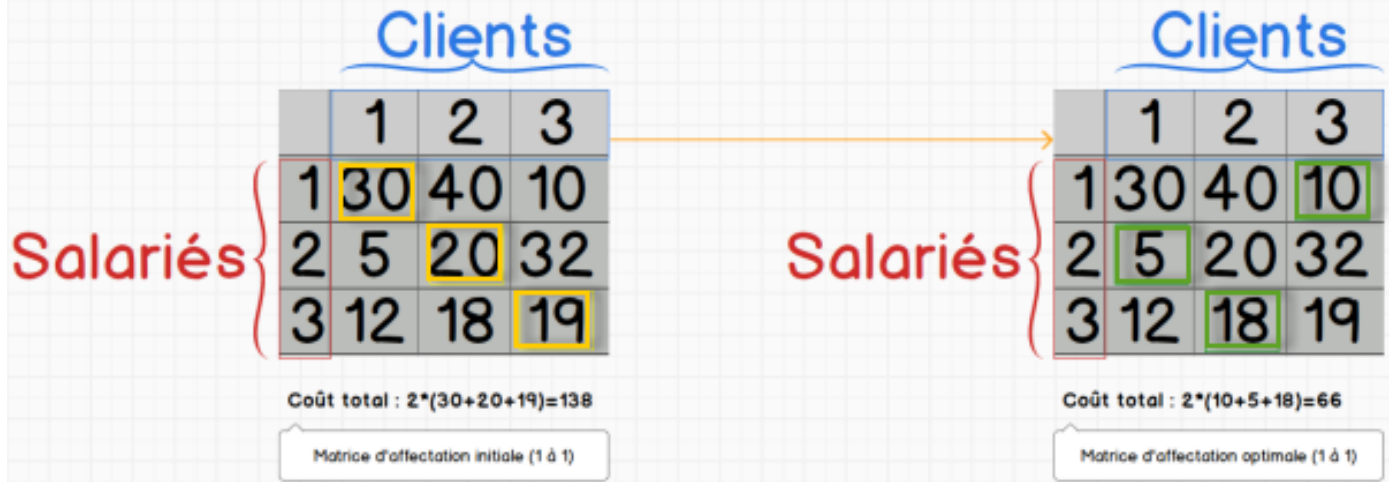
Introduction

Le but du présent article n'est pas de présenter le problème classique d'affectation d'un point de vue purement mathématique, mais plutôt de mettre l'accent sur son algorithme de résolution le plus connu dit "Méthode Hongroise" associé à KHÜN MUNKRES (1955).

Vous gérez une entreprise de salariés qui interviennent chez des clients. Tous vos salariés sont qualifiés pour fournir le même niveau de qualité de prestation chez vos clients. Votre souci est plutôt centré sur les coûts inhérents aux déplacements de vos salariés chez les clients à partir de leurs domiciles. Par conséquent vous optez pour des affectations de sorte est ce que les coûts relatifs aux déplacements des salariés domicile/locaux clients soient les plus bas possible. C'est à cette problématique par exemple que l'algorithme Hongrois répond. Autrement dit, vous fournir les affectations Salarié/Client de sorte à minimiser la somme des coûts des déplacements de vos salariés. Afin d'avoir une idée générale sur le problème d'affectation, la figure suivante illustre ce principe pour 3 salariés et 3 clients :



D'une manière équivalente la représentation matricielle se présente comme suit :



Le problème d'affectation peut être vu sous deux angles équivalents. Le premier est celui de la théorie des graphes, plus précisément en tant que graphe biparti dont le but est de minimiser (ou maximiser) les coûts des affectations 1 à 1 (couples formés des nœuds uniques de départ et d'arrivée (salarié, client)). Le deuxième est celui de la théorie d'optimisation combinatoire dont le but est de minimiser (ou maximiser) le coût total des combinaisons possibles avec des contraintes linéaires. La formulation combinatoire peut être effectuée via une matrice des coûts et c'est cette dernière qui fait l'objet principal de l'algorithme présenté ci-dessous. Vous l'avez remarqué, je n'ai présenté aucune formulation mathématique du problème, car il ne s'agit pas de l'objet de ce document, car les centaines de livres académiques et des articles scientifiques le font briller.

Par ailleurs, si vous souhaitez voir l'algorithme présenté dans la section suivante opérer sur des données réelles, je vous recommande le site suivant qui est y entièrement dédié comme son nom l'indique : <http://www.hungarianalgorithm.com> pouvant traiter des matrices d'affectation allant jusqu'à 10x10 (affectation de 10 salariés à 10 clients par exemple, 10 tâches à 10 ordinateurs, 10 intervenants à 10 tâches d'un projet, 10 avions d'une flotte aérienne à 10 trajets etc.).

Méthode Hongroise pas à pas

L'idée de l'algorithme Hongrois provient du fait que l'on obtient un problème équivalent en translatant la matrice associée par un même vecteur ou en la multipliant par une constante. Ce qui explique les opérations ci-dessous effectuées sur la matrice afin d'obtenir la solution optimale.

Pour les personnes ayant déjà une expérience dans la formulation algorithmique, elles sont invitées à examiner le pseudo-algorithme Hongrois cité ci-dessous avant d'aller examiner les étapes plus bas ou télécharger le fichier EXCEL qui accompagne cet article.

Algorithme :

SOIT EN ENTRÉE **A** LA MATRICE QUI CORRESPOND À L'AFFECTATION INITIALE. VOICI LES ÉTAPES À SUIVRE :

1. TROUVER LE MINIMUM DANS CHAQUE LIGNE DE LA MATRICE **A**. SOUSTRAIRE CHAQUE LIGNE DE SON MINIMUM CORRESPONDANT →
RÉSULTAT : MATRICE **A1**
2. TROUVER LE MINIMUM DANS CHAQUE COLONNE DE LA MATRICE **A1**. SOUSTRAIRE CHAQUE COLONNE DE **A1** DE SON MINIMUM CORRESPONDANT → RÉSULTAT : MATRICE **A2**
3. **TEST DE SOLUTION** : TRACER LE MINIMUM DE LIGNES (HORIZONTALES OU VERTICALES) À TRAVERS LA MATRICE **A2** POUR COUVRIR TOUS LES 0 DE LA MATRICE.
 - a) SI LE NOMBRE DE LIGNES COUVRANTES = LA DIMENSION DE LA MATRICE, ALORS **STOP**. UNE SOLUTION CORRESPOND AUX 0 DE LA MATRICE **A2**.
 - b) SINON, PASSER À L'ÉTAPE **ITÉRATION**.
4. **ITÉRATION** :
 - a) TROUVER LA VALEUR MINIMALE DE TOUTES LES ENTRÉES DE LA MATRICE NE SE TROUVANT PAS SUR LES LIGNES COUVRANTES
 - b) SOUSTRAIRE CETTE VALEUR DE TOUTES LES ENTRÉES QUI SE TROUVENT SUR LES LIGNES COUVRANTES SAUF LES ENTRÉES AUX INTERSECTIONS DES LIGNES
 - c) AJOUTER CETTE VALEUR À TOUTES LES ENTRÉES SE TROUVANT AUX INTERSECTIONS DES LIGNES COUVRANTES
 - d) RÉPÉTER L'ÉTAPE 3.

Afin d'illustrer l'algorithme Hongrois, les étapes suivantes sont déroulées sur un exemple où les étapes font référence à l'algorithme ci-dessus.

Matrice des distances A/R :**Clients****A. Données :**

La matrice des distances A/R entre les domiciles des salariés et les clients est donnée comme suit :

Salariés

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	18	14	100	24	56	84	76	10	70	34
2	66	72	38	60	90	6	48	62	18	78
3	12	56	48	90	68	56	28	90	94	18
4	82	12	78	74	32	88	22	40	88	38
5	86	86	82	88	20	12	52	88	56	24
6	40	26	98	94	94	36	98	6	74	18
7	96	94	66	90	100	62	12	68	86	96
8	16	64	40	98	18	28	76	60	6	66
9	46	56	12	20	96	98	20	84	50	24
10	98	64	2	24	30	74	4	48	96	14

Clients**B. Etapes de l'algorithme :****Etape 1 :**

Ajouter une colonne "**Row Min**" contenant le minimum de chaque ligne de la matrice.

Puis soustraire chaque entrée de chaque ligne du minimum correspondant.

Salariés

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Row Min
1	18	14	100	24	56	84	76	10	70	34	10
2	66	72	38	60	90	6	48	62	18	78	6
3	12	56	48	90	68	56	28	90	94	18	12
4	82	12	78	74	32	88	22	40	88	38	12
5	86	86	82	88	20	12	52	88	56	24	12
6	40	26	98	94	94	36	98	6	74	18	6
7	96	94	66	90	100	62	12	68	86	96	12
8	16	64	40	98	18	28	76	60	6	66	6
9	46	56	12	20	96	98	20	84	50	24	12
10	98	64	2	24	30	74	4	48	96	14	2

Soustraire la colonne "Row Min" de chaque ligne de la matrice

Clients

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	4	90	14	46	74	66	0	60	24
2	60	66	32	54	84	0	42	56	12	72
3	0	44	36	78	56	44	16	78	82	6
4	70	0	66	62	20	76	10	28	76	26
5	74	74	70	76	8	0	40	76	44	12
6	34	20	92	88	88	30	92	0	68	12
7	84	82	54	78	88	50	0	56	74	84
8	10	58	34	92	12	22	70	54	0	60
9	34	44	0	8	84	86	8	72	38	12
10	96	62	0	22	28	72	2	46	94	12
Col Min	0	0	0	8	8	0	0	0	0	6

Salariés

Etape 2 :

Ajouter une ligne "Col Min" contenant le minimum de chaque colonne de la matrice.

Puis soustraire chaque entrée de chaque colonne du minimum correspondant.

Soustraire la ligne "Col Min" de chaque colonne de la matrice

Etape 3 (test de la solution) :

A partir de la matrice résultante, identifier (en surlignant en bleu) le nombre minimum de lignes horizontales et verticales afin de couvrir tous les zéros de la matrice.

On note que le nombre de lignes et de colonnes couvrant tous les 0 est de 8 lignes verticales et 1 ligne horizontale, ce qui donne au total 9 lignes inférieur à 10 la dimension de la matrice.

Par conséquent nous ne disposons pas encore de la solution optimale. Nous devons alors passer à une 1ère itération.

Clients

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	4	90	6	38	74	66	0	60	18
2	60	66	32	46	76	0	42	56	12	66
3	0	44	36	70	48	44	16	78	82	0
4	70	0	66	54	12	76	10	28	76	20
5	74	74	70	68	0	0	40	76	44	6
6	34	20	92	80	80	30	92	0	68	6
7	84	82	54	70	80	50	0	56	74	78
8	10	58	34	84	4	22	70	54	0	54
9	34	44	0	0	76	86	8	72	38	6
10	96	62	0	14	20	72	2	46	94	6

Salariés

Couvrir toutes les entrées 0 par un minimum de lignes et de colonnes

Ce qui donne 8 lignes et 1 colonne couvrantes= 9 en tout < 10

(nombre d'affectations max 1 à 1)

Clients

Salariés

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	8	4	90	6	38	74	66	0	60	18	
2	60	66	32	46	76	0	42	56	12	66	X
3	0	44	36	70	48	44	16	78	82	0	X
4	70	0	66	54	12	76	10	28	76	20	X
5	74	74	70	68	0	0	40	76	44	6	X
6	34	20	92	80	80	30	92	0	68	6	
7	84	82	54	70	80	50	0	56	74	78	X
8	10	58	34	84	4	22	70	54	0	54	X
9	34	44	0	0	76	86	8	72	38	6	X
10	96	62	0	14	20	72	2	46	94	6	X
								Y			

a) L'entrée la plus petite parmi celles non coloriées en **bleu** =

4

b) Soustraire cette valeur de toutes les entrées non coloriées

c) **Ajouter** cette valeur à toutes les entrées qui se trouvent aux intersections **coloriées**

Etape 4 (a)(b)(c) :

Après ces opérations
constituant une **1ère**
itération on passe encore à
l'étape 3 de test de solution.

		Clients									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Salariés	1	4	0	86	2	34	70	62	0	56	14
	2	60	66	32	46	76	0	42	60	12	66
	3	0	44	36	70	48	44	16	82	82	0
	4	70	0	66	54	12	76	10	32	76	20
	5	74	74	70	68	0	0	40	80	44	6
	6	30	16	88	76	76	26	88	0	64	2
	7	84	82	54	70	80	50	0	60	74	78
	8	10	58	34	84	4	22	70	58	0	54
	9	34	44	0	0	76	86	8	76	38	6
	10	96	62	0	14	20	72	2	50	94	6

Couvrir toutes les entrées 0 par un minimum de lignes et de colonnes
Ce qui donne 7 lignes et 2 colonnes couvrantes = 9 en tout < 10
(nombre d'affectations max 1 à 1). Donc Il faut continuer

Etape 3 (test de la solution) :

Une fois encore, on remarque que le nombre de lignes couvrant les zéros = $7X + 2Y = 9 < 10$.

Par conséquent, on doit effectuer une **2ème itération.**

[illegible]

a) L'entrée la plus petite parmi celles non coloriées en **bleu** =

2

b) **Soustraire** cette valeur de toutes les entrées non coloriéesc) **Ajouter** cette valeur à toutes les entrées qui se trouvent aux intersections **coloriées**

Clients

Etape 4 (a)(b)(c) :

Après les opérations (a), (b) et (c) constituant la **2ème itération** on passe encore à l'étape 3 de test de solution.

Salariés

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	0	84	0	32	68	60	0	54	12
2	60	68	32	46	76	0	42	62	12	66
3	0	46	36	70	48	44	16	84	82	0
4	68	0	64	52	10	74	8	34	74	18
5	74	76	70	68	0	0	40	82	44	6
6	28	18	86	74	74	24	86	0	62	0
7	84	84	54	70	80	50	0	62	74	78
8	10	60	34	84	4	22	70	60	0	54
9	34	46	0	0	76	86	8	78	38	6
10	96	64	0	14	20	72	2	52	94	6

Etape 3 (test de la solution) :

Couvrir toutes les entrées 0 par un minimum de lignes et de colonnes
Ce qui donne 10 lignes couvrantes en tout = nombre d'affectations max 1 à 1). **Donc on a une solution optimale ! STOP**

Clients

On constate que le nombre minimum de lignes pour couvrir tous les zéros de la matrice est égal à 10. Par conséquent on a une solution optimale.

Les entrées de la solution optimale correspondent aux entrées nulles de la matrice ci-contre.

La solution optimale est illustrée ci-dessous. Autrement dit, les affectations optimales sont :

Salariés

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	2	0	84	0	32	68	60	0	54	12	X
2	60	68	32	46	76	0	42	62	12	66	X
3	0	46	36	70	48	44	16	84	82	0	X
4	68	0	64	52	10	74	8	34	74	18	X
5	74	76	70	68	0	0	40	82	44	6	X
6	28	18	86	74	74	24	86	0	62	0	X
7	84	84	54	70	80	50	0	62	74	78	X
8	10	60	34	84	4	22	70	60	0	54	X
9	34	46	0	0	76	86	8	78	38	6	X
10	96	64	0	14	20	72	2	52	94	6	X

Solution Optimale :

Correspond aux entrées coloriées en **vert**

Ce qui donne une distance minimale de : **118** KM

- Salarié 1 affecté au client 8
- Salarié 2 affecté au client 6
- Salarié 3 affecté au client 1
- etc.

D'après vous cette solution optimale est-elle unique ?

		Clients									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Salariés	1	18	14	100	24	56	84	76	10	70	34
	2	66	72	38	60	90	6	48	62	18	78
	3	12	56	48	90	68	56	28	90	94	18
	4	82	12	78	74	32	88	22	40	88	38
	5	86	86	82	88	20	12	52	88	56	24
	6	40	26	98	94	94	36	98	6	74	18
	7	96	94	66	90	100	62	12	68	86	96
	8	16	64	40	98	18	28	76	60	6	66
	9	46	56	12	20	96	98	20	84	50	24
	10	98	64	2	24	30	74	4	48	96	14